Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Д. А. РАЙКОВ

О КОМПОНИРОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 III 1939)

Доказываемый в настоящей заметке результат относится к проблеме зависимости аналитического характера композиции функций распределения от аналитического характера компонент *. Известно, что при компонировании непрерывной функции распределения с любой получается непрерывная функция распределения, а если одна из компонент абсолютно непрерывна, то и композиция абсолютно непрерывна. Известно также, что максимум производной композиции не может превышать максимума производной компоненты. Опираясь на эти и подобные факты, Paul Lévy сформулировал следующий принцип [1]: «Вообще каждое условие непрерывности или аналитичности, наложенное уже на один из компонируемых законов, каждое условие, ограничивающее негладкость (irrégularité) его функции распределения и ее производных, сохраняется и для результата компонирования. Компонирование может лишь улучшить непрерывность и гладкость».

Из доказываемого ниже результата будет следовать, что в столь общей форме этот принцип неверен. Именно, мы покажем, что существуют две целые аналитические функции распределения, композиция которых не аналитична в начале координат.

Мы будем рассматривать функции распределения $F(x)$, регулярные внутри какой-либо полосы $|\Im x| < R$. Если $F(x)$ ограниченна в каждой внутренней полосе $|\Im x| \leqslant r < R$, то и композиция ее с любой функцией распределения $G(x)$ будет регулярна внутри полосы $|\Im x| < R$ и ограничена в каждой ее внутренней полосе. Действительно, в силу условия выражение $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\, dG(y)$ имеет смысл для всех x, лежащих на любой прямой $\Im x = \pm r$, $|r| < R$, и легко убедиться в том, что определяемая им функция обладает указанными свойствами.

---

* Функциями или законами распределения называются неубывающие функции $F(x)$, определенные на всей прямой $-\infty < x < \infty$ и подчиненные условию $F(x) \to 0$ при $x \to -\infty$ и $F(x) \to 1$ при $x \to +\infty$. Композицией $F(x) = F_1(x) * F_2(x)$ функций распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ называется функция распределения

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)\, dF_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_2(x-y)\, dF_1(y).$$

$F_1(x)$ и $F_2(x)$ называются ее компонентами.

Но существуют аналитические функции распределения, не ограниченные ни в какой, сколь угодно узкой полосе $|\Im x| < \rho$. Такой является например целая функция распределения

$$F(x) = e^{1-e^{e^{-x}}} *.$$

Действительно, полагая $x = \xi + i\eta$, имеем

$$|F(x)| = e^{1-e^{e^{-\xi}\cos\eta}\cos(e^{-\xi}\sin\eta)}$$

и при $\xi \to -\infty$ и $|\eta| < \frac{\pi}{2}$ это выражение будет неограниченно, так как $e^{e^{-\xi}\cos\eta} \to \infty$, а $\cos(e^{-\xi}\sin\eta)$ колеблется между $+1$ и -1.

Теорема. *Если $F(x)$ есть функция распределения, не являющаяся ограниченной аналитической ни в какой полосе $|\Im x| < \rho$, то «симметризованная» функция распределения*

$$F^*(x) = F(x) * \overline{F}(x) = F(x) * [1 - F(-x)]$$

не регулярна в точке $x = 0$.

Доказательство основывается на двух леммах о функциях распределения с вещественными неотрицательными характеристическими функциями **:

Лемма 1. *Пусть $F(x)$ — функция распределения и $f(t)$ — ее характеристическая функция. Если $F'(0)$ существует и $f(t) \geqslant 0$, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ сходится; тогда $F'(x)$ существует для всех вещественных x, причем*

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t)\,dt.$$

Лемма 2. *Пусть $F(x)$ — функция распределения и $f(t)$ — ее характеристическая функция. Если $F(x)$ регулярна в круге $|x| < R$ и $f(t) \geqslant 0$, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{r|t|}\,dt$ сходится для всех $r < R$; тогда $F(x)$ регулярна в полосе $|\Im x| < R$ и ограничена в каждой внутренней полосе $|\Im x| \leqslant r < R$.*

Доказательство леммы 1. Функции распределения $F_h(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} F(x+\tau)\,d\tau$ соответствует характеристическая функция $f(t)\frac{\sin ht}{ht}$. В силу формулы обращения (P. Lévy)

$$F_h(x) - F_h(-x) = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega}^{\omega} f(t)\,\frac{\sin ht}{ht}\,\frac{2\sin xt}{t}\,dt,$$

---

* Пример указан А. О. Гельфондом.

** Характеристической функцией функции распределения $F(x)$ называется

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x), \quad -\infty < t < \infty.$$

откуда, полагая $x=h$, получаем

$$\frac{F_h(h)-F_h(-h)}{2h}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\frac{\sin ht}{ht}\right)^2 dt. \tag{1}$$

Но

$$\frac{F_h(h)-F_h(-h)}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2h}\int_0^h\left(\frac{h+\tau}{h}\,\frac{F(h+\tau)-F(-h-\tau)}{2(h+\tau)}+\frac{h-\tau}{h}\,\frac{F(h-\tau)-F(-h+\tau)}{2(h-\tau)}\right)d\tau=$$

$$=F'(0)+o(h) \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Следовательно предел правой части (1) при $h\to 0$ существует; в силу неотрицательности $f(t)$ он равен $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$. Последнее утверждение леммы получается тогда путем дифференцирования формулы обращения

$$F(x)-F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1-e^{-ixt}}{it}\,dt.$$

Доказательство леммы 2. Так как $F'(0)$ существует, то в силу леммы 1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt<\infty$ и

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,dt, \tag{2}$$

т. е. в силу неотрицательности $f(t)$ $F'(x)$ совпадает с точностью до постоянного положительного множителя с характеристической функцией некоторого закона распределения. Так как вместе с тем $F'(x)$ регулярна в круге $|x|<R$, то ([2]) представление (2) для $F'(x)$ справедливо во всей полосе $|\Im x|<R$, откуда и следует первое утверждение леммы. Далее, полагая $x=\xi+i\eta$, $|\eta|<R$, имеем

$$F(\xi+i\eta)=F(\xi)+\int_{\xi}^{\xi+i\eta} F'(x)\,dx,$$

значит, при $|\eta|\leqslant r\,(<R)$,

$$|F(x)|\leqslant 1+\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{r|t|}\,dt,$$

а это доказывает второе утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Нетрудно видеть, что если для некоторой функции распределения $F(x)$ симметризованная функция распределения $F^*(x)=F(x)*\overline{F}(x)$ регулярна в круге $|x|<R$, то $F(x)$ регулярна в полосе $|\Im x|<\frac{R}{2}$ и ограничена в каждой внутренней полосе $|\Im x|\leqslant\rho<\frac{R}{2}$. В самом деле, характеристической функцией для $F^*(x)$ служит $|f(t)|^2\geqslant 0$, и по лемме 2 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 e^{r|t|}\,dt<\infty$ для всех $r<R$. Пусть r' — какое-нибудь число, заключенное между r и R.

По неравенству Шварца имеем

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|e^{\frac{r}{2}|t|}\,dt\right)^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|e^{\frac{r'}{2}|t|}e^{-\frac{r'-r}{2}|t|}\,dt\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2e^{r'|t|}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(r'-r)|t|}\,dt<\infty.$$

Таким образом интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|e^{\rho|t|}\,dt$ сходится для всех $\rho<\frac{R}{2}$. Отсюда следует, что $F'(x)$, определяемая формулой (2), регулярна в полосе $|\mathfrak{J}x|<\frac{R}{2}$ и ограничена в каждой внутренней полосе $|\mathfrak{J}x|\leqslant\leqslant\rho<\frac{R}{2}$. А тогда так же, как выше при доказательстве леммы 2, убеждаемся в том, что то же справедливо и для $F(x)$.

Но тем самым доказана и наша теорема, так как рассматриваемые в ней функции распределения не являются ограниченными аналитическими ни в какой полосе $|\mathfrak{J}x|<\rho$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
1 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Paul Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, p. 91 (1937).
[2] Д. А. Райков, Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., вып. 1 (1938); P. Lévy, C. R. Acad. Sci., Paris, **204**, № 2 (1937).