МАШИНОСТРОЕНИЕ, МЕХАНИКА

УДК 531.3

Ю. А. КАШИН[1], М. И. ЖАДАН[1], Р. Е. КАШИНА[2]

КИНЕТИКА БИФИЛЯРНО-КОНТРОЛИРУЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ СВОБОДНЫХ ТЕЛ

[1]Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
[2]Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого

(Поступила в редакцию 30.09.2014)

Введение. Рассмотрим кинетику процессов осуществления следующих движений тел:

строго регламентированные, поступательные перемещения грузовых контейнеров, осторожно переносимых портальными кранами, в логистических коллекторах;

спонтанные, акробатические виражи-полеты кайт-серферов, увлекаемых стропами своих воздушных змеев-кайтов, на показательных выступлениях;

грациозные симуляции танцевальных «па» куклами марионетками, управляемыми артистами-кукловодами, на кукольных спектаклях;

парашютные торможения приземляющихся самолетов и десантируемых с них грузов.

Анализ условий, методов и средств реализации этих процессов позволяет определить особый класс высокоманевренных движений свободных тел в поле сил земного тяготения. Класс бифилярно-контролируемых движений тел, каждым элементом которого является конкретный вариант исполнения функционально-полезного движения свободного тела *S*, совершаемого им в своих условиях, в течение ограниченного интервала времени $t \in [0, T]$ по определенному пространственно-временному закону и осуществляемого под действием системы сил $\Sigma = \Sigma(t)$. В состав такой системы входят постоянная сила тяжести $\vec{G}$, распределенные массовые силы инерции тела *S* и две переменные по модулю и по направлению, силы натяжения пары связанных с этим телом гибких, управляющих поводков:

$$\vec{P} = \vec{P}(t), \;\; \vec{Q} = \vec{Q}(t), \tag{1}$$

адекватные данным условиям и закону его искомого движения.

Эти определенные и непрерывные вектор-функции времени *t* условимся называть алгоритмом силового управления данного бифилярно-контролируемого движения свободного тела *S* его гибкими напряженными поводками. Механическую систему, обеспечивающую это движение тела *S*, назовем свободным, мобильным бифиляром *S* или бифиляром *S*.

Предметом настоящей работы является формальное описание некоторого определенного бифилярно-контролируемого движения данного свободного твердого тела *S* и построение алгоритма его силового управления своими гибкими напряженными поводками на основании известных понятий и положений классической механики твердого тела [1,3] и кинетики механических систем с гибкими связями [4–8].

Математическая модель задачи исследования. Проектируемое движение тела *S* при $t \in [0, T]$ будем определять в условно неподвижной, связанной с Землей правой прямоугольной системе осей декартовых координат $O'X_1'X_2'X_3'$ с ортами $\vec{E}_j', j = \overline{1,3}$, началом которой служит некоторая фиксированная точка O' земной сферы, где плоскость $O'X_1'X_2'$ является касательной и горизонтальной плоскостью, ось $O'X_3'$ направлена вертикально вниз к центру Земли, где областью возможных положений точек тела *S* является верхнее полупространство $X_3' <= 0$.

Тело *S* считаем выпуклым (рисунок). Пусть *m*, кг – его масса, *C* – центр масс и точка приложения его массовой силы тяжести

$$\vec{G} = mg\vec{E}_3', \text{ Н}, \tag{2}$$

где g = 9,81 м/с^2 – ускорение свободного падения тел на Земле, *A* и *B* – две точки поверхности тела *S*, в которых плотно защемлены концы пары напряженных отрезков гибкой, нерастяжимой и невесомой нити длиной p (м) и q (м), именуемых гибкими управляющими поводками тела *S*, P и Q – их свободные концы, $\vec{P}(t)$ (Н) и $\vec{Q}(t)$ (Н) – искомые силы их натяжения.

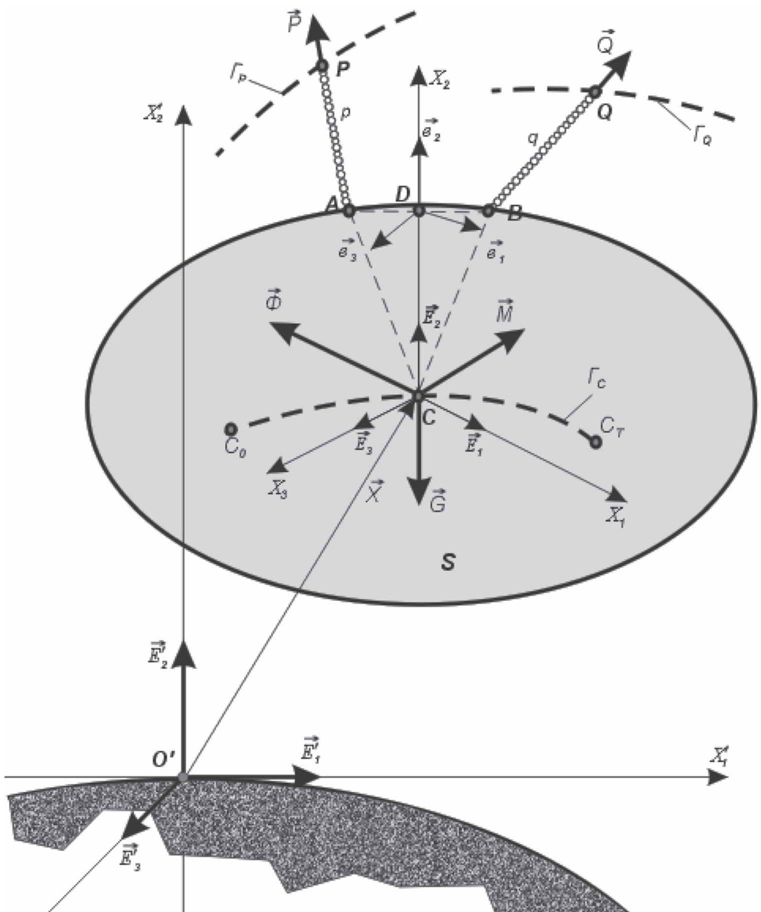
Тело *S* считаем определенным в своей локальной, правой триортогональной системе осей координат, образуемой ее главными центральными осями инерции $CX_k, k = \overline{1,3}$, пусть i_k (м) – соответствующие осевые радиусы инерции тела *S*,

$$I_k = mi_k^2, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \ (k = \overline{1,3}) \tag{3}$$

– его соответствующие главные центральные моменты инерции,

$$\vec{E}_k = \vec{E}_k(t) \ (k = \overline{1,3}) \tag{4}$$

– вектор-функции определения переменной пространственной ориентации единичных направляющих векторов соответствующих осей локальных координат тела *S* относительно осей декартовой системы координат.



Кинетическая схема мобильного бифилярного подвеса тела *S*

Предполагаем, что нумерация этих осей, выбор и расположение точек крепления его гибких поводков определены так, что

точки приложения сил $\vec{P}$, $\vec{Q}$ и $\vec{G}$ являются вершинами действительного равнобедренного ΔABC с высотой $CD = h$ м и боковыми сторонами $CA = CB = l$ (м);

локальная ось координат CX_3 тела S перпендикулярна плоскости ΔABC, а ось CX_2 оказывается его осью симметрии.

Удовлетворяя этим условиям, локальные радиусы-векторы точек A и B крепления гибких поводков определим значениями

$$\overrightarrow{CA}(t) = \vec{A}(t) = l\left[\vec{E}_2(t)\sin\alpha + \vec{E}_3(t)\cos\alpha\right],\ \overrightarrow{CB}(t) = \vec{B}(t) = l\left[-\vec{E}_2(t)\sin\alpha + \vec{E}_3(t)\cos\alpha\right], \tag{5}$$

где

$$\alpha = \arccos\frac{h}{l}. \tag{6}$$

Считаем, что искомые силы (1) натяжения гибких поводков будут определяться своими координатными формами в базисе локальной системы координат тела S:

$$\vec{P}(t) = \sum_{k=1}^{3} P_k(t)\vec{E}_k(t),\ \vec{Q}(t) = \sum_{k=1}^{3} Q_k(t)\vec{E}_k(t). \tag{7}$$

Тогда переменными

$$\gamma_k(t) = \frac{P_k(t)}{\left|\vec{P}(t)\right|},\ \Delta_k(t) = \frac{Q_k(t)}{\left|\vec{Q}(t)\right|}\ (k = \overline{1,3}) \tag{8}$$

будут определены направляющие косинусы этих сил и коллинеарных им ориентированных отрезков гибких напряженных поводков тела S

$$\vec{p}(t) = p\sum_{k=1}^{3} \gamma_k(t)\vec{E}_k(t),\ \vec{q}(t) = q\sum_{k=1}^{3} \Delta_k(t)\vec{E}_k(t). \tag{9}$$

Следовательно, свободное тело S, обладающее шестью степенями своей позиционной свободы, сохраняет их все и в случае действия гибких напряженных поводков.

Данное бифилярно-контролируемое движение тела S представим и рассмотрим в форме геометрической суперпозиции его двух синхронно выполняемых элементарных движений: переносное, строго поступательное движение – однородная трансляция всего множества точек тела S совместно с его центром масс – полюсом C и относительное вращение этого тела – строго сферическое движение всех его точек относительно его центра мгновенного вращения – полюса C. Обобщенными позиционными координатами такой композиционной формы представления рассматриваемого движения тела S относительно осей декартовой системы координат принимаем упорядоченное множество шести заданных независимых функций времени $t \in [0, T]$, непрерывных вместе со своими производными до второго порядка включительно, состоящее из трех функций определения тройки независимых декартовых, линейных координат тела S

$$X'_j = X'_j(t),\ j = \overline{1,3}, \tag{10}$$

характеризующих движение полюса C тела S и его относительное, переносное движение, и трех функций определения последовательности трех независимых эйлеровых угловых координат тела S

$$\psi = \psi(t),\ \Theta = \Theta(t),\ \varphi = \varphi(t), \tag{11}$$

называемых соответственно углом относительной прецессии тела S, углом его относительной нутации, углом его относительного собственного вращения [1] и определяющих переменные значения девяти элементов матрицы ориентации Эйлера для тела S:

$$Э_{jk}(t) = \vec{E}'_j \cdot \vec{E}_k(t) =$$
$$\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\Theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\Theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\Theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\Theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\Theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\Theta \\ \sin\Theta\sin\varphi & \sin\Theta\cos\varphi & \cos\Theta \end{bmatrix}, \quad (12)$$
$$j = \overline{1,3}, \;\; k = \overline{1,3}.$$

Условимся считать, что пространственно временной закон движения тела S, параметрически определяемый функциями (10), (11), является нормативным положением технического задания на разработку проекта электромеханической системы для осуществления данного функционально полезного движения тела S и что этим движением тела S обеспечивается его искомый полезный эффект.

Пространственную кривую $\Gamma(C)$, описываемую полюсом C тела S и определяемую функциями (10), назовем орбитой данного бифилярно-контролируемого движения этого тела. С использованием вектор-функции

$$\overrightarrow{O'C}(t) = \vec{X}(t) = \sum_{j=1}^{3} X'_j(t)\vec{E}'_j \quad (13)$$

определяем скорость полюса C и линейную скорость переносного поступательного движения тела S. Переменные (12) позволяют определить следующие взаимосвязи его кинетических характеристик движения:

$$\vec{E}_k(t) = \sum_{j=1}^{3} Э_{jk}(t)\vec{E}'_j, \;\; k = \overline{1,3}, \quad (14)$$

$$\vec{E}'_j(t) = \sum_{k=1}^{3} Э_{jk}(t)\vec{E}_k = \text{const}, \;\; j = \overline{1,3}, \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^{3} Э^2_{jk}(t) = 1, \;\; j = \overline{1,3}, \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{3} Э^2_{jk}(t) = 1, \;\; k = \overline{1,3}. \quad (17)$$

$$\vec{P}'_j(t) = \vec{P}(t) \cdot \vec{E}'_j(t) = \sum_{k=1}^{3} Э_{jk}(t)P_k(t), \;\; j = \overline{1,3}, \quad (18)$$

$$\vec{Q}'_j(t) = \vec{Q}(t) \cdot \vec{E}'_j(t) = \sum_{k=1}^{3} Э_{jk}(t)Q_k(t), \;\; j = \overline{1,3}. \quad (19)$$

Затем используем функции обобщенных координат (10), (11) и их производные и составляем аналитические выражения основных характеристик процесса движения тела S:

его скорости переносного поступательного движения

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \frac{dX'_j(t)}{dt}\vec{E}'_j = \sum_{j=1}^{3} V'_j(t)\vec{E}'_j, \quad (20)$$

его количества движения

$$\vec{K}(t) = m\vec{V}(t) = m\sum_{j=1}^{3} V'_j(t)\vec{E}'_j = \sum_{j=1}^{3} K'_j(t)\vec{E}'_j. \quad (21)$$

Угловую скорость относительного вращения тела S вокруг своего центра C определим вектор-функцией

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) = \sum_{k=1}^{3} \omega_k(t) \cdot \vec{E}_k(t), \tag{22}$$

где, согласно кинематическим уравнениям Эйлера [1]:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(t) &= \frac{\partial\psi}{\partial t}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial\theta}{\partial t}\cos\varphi, \\ \omega_2(t) &= \frac{\partial\psi}{\partial t}\sin\theta\cos\varphi - \frac{\partial\theta}{\partial t}\sin\varphi, \\ \omega_3(t) &= \frac{\partial\psi}{\partial t}\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Центральный кинетический момент тела S равен

$$\vec{\mu}(t) = \sum_{k=1}^{3} \mu_k(t)\vec{E}_k, \tag{24}$$

где

$$\mu_k(t) = I_k\omega_k(t),\ k = \overline{1,3}. \tag{25}$$

Применяя теоремы о движении центра масс тела S и об изменении его центрального кинетического момента, определяем главный вектор

$$\vec{\Phi}(t) = \sum_{j=1}^{3} \Phi'_j(t)\vec{E}'_j(t) = \sum_{j=1}^{3} m\frac{d^2X'_j(t)}{dt^2}\vec{E}'_j(t) \tag{26}$$

распределенных массовых сил инерции поступательного переносного движения тела S и главный момент

$$\vec{M}(t) = \sum_{k=1}^{3} M_k(t)\vec{E}_k(t) = \frac{d\vec{\mu}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{d\mu_k(t)}{dt}\vec{E}_k(t) + \mu_k(t)(\vec{\omega}(t)\times\vec{E}_k)\right) \tag{27}$$

пары сил распределенных массовых сил инерции относительного вращения тела вокруг полюса C.

Принимаем точку D, среднюю между A и B, центром приведения системы сил $\Sigma = \Sigma(t)$ и, используя принцип Даламбера, можем записать

$$\begin{cases} \vec{G} + \overrightarrow{P(t)} + \overrightarrow{Q(t)} + \vec{\Phi}(t) = 0, \\ \overrightarrow{DA(t)}\times\overrightarrow{P(t)} + \overrightarrow{DB(t)}\times\overrightarrow{Q(t)} + \overrightarrow{DC(t)}\times\vec{G} + \vec{M}(t) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Введем вспомогательную систему осей координат $Dx_1x_2x_3$ с ортами $\vec{e}_k = \vec{E}_k$ $(k = 1,2,3)$ и, проектируя данные уравнения на эти оси координат, получаем систему шести уравнений для нахождения шести компонент сил натяжения гибких поводков, обеспечивающих заданный закон движения тела S. Используя полученные результаты, можем записать векторные уравнения движений точек P и Q, необходимые для осуществления обсуждаемого движения этого тела:

$$\begin{cases} \vec{P}(t) = \overrightarrow{O'P(t)} + \overrightarrow{O'C(t)} + \overrightarrow{CA(t)} + \overrightarrow{AP(t)}, \\ \vec{Q}(t) = \overrightarrow{O'Q(t)} + \overrightarrow{O'C(t)} + \overrightarrow{CB(t)} + \overrightarrow{BQ(t)}, \end{cases} \tag{29}$$

где слагаемые правых частей определены формулами (5) и (13).

Заключение. Рассмотрено регулярное движение свободного твердого тела S, совершаемое по некоторому искомому пространственно-временному закону. Движение осуществляется под действием системы сил, включающей соответствующие распределенные массовые силы инерции этого тела, его постоянную силу тяжести и две переменные по модулю и по направлению силы натяжения пары связанных с телом *S* его гибких управляющих поводков. В сравнении с известными аналогичными моделями полученные результаты позволяют определить алгоритм силового управления свободного твердого тела *S* его гибкими напряженными поводками, необходимый для осуществления заданного бифилярно-контролируемого движения этого тела.

Литература

1. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. М., 1972. Ч. 1.
2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М., 1974.
3. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики: В 5 т. Том 1. Механика. М., 2005.
4. *Бараев А., Смирнов А. И.* // Вестн. МЭИ. 2009. № 5. С. 24–28.
5. *Пожарицкий Г. К.* // ПММ. 1973. Т. 37.1, вып. 4. С. 647–658.
6. *Лаврушина Е. Г., Гузев М. А.* // Матер. 5-й Междунар. науч.-практ. конф. Ч. 1. Новочеркасск, 2005. С. 46–47.
7. *Кашин, Ю. А., Жадан М. И., Кашина Р. Е* // Вестн. ГГТУ им. П. О. Сухого. 2008. № 2. С. 29–37.
8. *Кашин, Ю. А., Жадан М. И., Кашина Р. Е.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2012. № 3. С. 45–50.

Yu. A. KASHIN, M. I. ZHADAN, R. E. KASHINA

KINETICS OF BIFILARLY-CONTROLLED MOVEMENT OF FREE BODIES

Summary

A free solid body *S* regular movement in accordance with some wanted time-space rule is considered. This movement is effected by a system of forces, including the appropriate distributed mass forces of inertia of the body, its constant force of gravity and the two variables in magnitude and in the direction of the tensile force of the pair associated with the body flexible control leashes. Leashes tension forces, adequate to these conditions and the rule of the wanted movement of the body *S* are defined. A mathematical model of such movement is presented.