Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД

О НОРМИРОВАННЫХ КОЛЬЦАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 III 1939)

Определение 1. Множество R элементов $x, y, \ldots$ называется нормированным кольцом, если

a) оно является полным нормированным пространством с умножением на комплексные числа;

b) вместе с элементами x и y существует их произведение xy, обладающее обычными алгебраическими свойствами и непрерывное по крайней мере относительно одного из сомножителей;

c) в R есть единичный элемент e.

Можно показать, что в R существует норма, эквивалентная заранее данной и обладающая следующими свойствами:

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \qquad \|e\| = 1.$$

В дальнейшем рассматриваются коммутативные кольца.

Определение 2. Идеалом I называется совокупность элементов $x, y, \ldots \subset R$, обладающая следующими свойствами:

a) если $x \in I$, $y \in I$, то $\alpha x + \beta y \in I$

(α и β любые комплексные числа);

b) если $x \in I$, а z любой элемент кольца R, то $xz \in I$.

Тривиальными идеалами являются все кольцо и нулевой идеал. Идеал, состоящий из одного только элемента 0. Всякий идеал, отличный от них, мы будем называть нетривиальным.

Определение 3. Максимальным идеалом называется нетривиальный идеал, не содержащийся ни в каком другом нетривиальном идеале.

Теорема 1. *Всякий максимальный идеал замкнут (т. е. множество элементов, входящих в этот идеал, замкнуто в R).*

Теорема 2. *Всякий нетривиальный идеал содержится в максимальном идеале.*

Кольцо вычетов $\frac{R}{I}$, где I — некоторый замкнутый идеал, можно снова сделать нормированным кольцом. Как известно, элементами $\frac{R}{I}$ являются классы $X, Y, \ldots$ состоящие из элементов $x', x'', \ldots$ таких, что $x' - x'' \in I$. Норма класса X определяется следующим образом: $\|X\| = \inf \|x\|$, где $x \in X$.

Можно доказать, что в кольце вычетов выполнены все аксиомы нормированного кольца.

Теорема 3. *Кольцо вычетов по максимальному идеалу есть тело комплексных чисел.*

Таким образом каждому элементу $x \in R$ и каждому максимальному идеалу M соответствует комплексное число $x(M)$, а именно то число, в которое x переходит при гомоморфизме $R \sim \frac{R}{M}$. Итак получаем:

Теорема 4. *Каждому элементу $x \in R$ соответствует функция $x(M)$, заданная на множестве $\mathfrak{M}$ всех максимальных идеалов. Сумме элементов соответствует сумма функций, произведению элементов — произведение функций.*

Функция $x(M)$ ограничена. А именно $|x(M)| \leqslant \|x\|$. Можно показать, что $\sup |x(M)| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

Тем самым получаем теорему 5:

Теорема 5. *Если в кольце R нет элементов, отличных от нуля, для которых $\sqrt[n]{\|x^n\|} \to 0$, то наше кольцо изоморфно кольцу функций, определенных на множестве максимальных идеалов.*

Мы покажем, что эти функции $x(M)$ являются функциями непрерывными. Для этого нужно топологизировать множество $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов. Топологию мы будем задавать системой окрестностей.

Определение 4. Совокупность K элементов кольца R называется совокупностью образующих кольца R, если наименьшее замкнутое кольцо, содержащее K, есть все R.

Определение 5. Окрестностью максимального идеала M_0 мы будем называть совокупность максимальных идеалов, удовлетворяющих неравенствам

$$|x_i(M) - x_i(M_0)| < \varepsilon, \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

где ε и n произвольны, $x_1, \ldots, x_n$ — любые элементы из совокупности K образующих кольца R.

Полученная топология в $\mathfrak{M}$ не зависит от выбора K.

Оказывается, что множество $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов в этой топологии является бикомпактным Hausdorff'овым пространством и функции $x(M)$ на нем непрерывны. В результате получаем следующую основную теорему:

Теорема 6. *Всякое абстрактное нормированное кольцо R может быть гомоморфно отображено в кольцо непрерывных функций заданных на Hausdorff'овом бикомпактном пространстве максимальных идеалов кольца R. При этом необходимым и достаточным условием изоморфизма является выполнение условий теоремы 5.*

В отдельных случаях можно более точно указать топологические свойства множества $\mathfrak{M}$. Именно:

1. Если кольцо R сепарабельно, то множество $\mathfrak{M}$ метризуемо;

2. Если кольцо R порождается системой из n образующих, то множество $\mathfrak{M}$ гомеоморфно компактному подмножеству n-мерного комплексного пространства.

Теорема 7. *Если в кольце R для каждого элемента x есть комплексно-сопряженный, т. е. такой элемент y, что $y(M) = \overline{x(M)}$, каково бы ни было M из $\mathfrak{M}$, то каждая функция, непрерывная на множестве $\mathfrak{M}$, есть предел равномерно сходящейся последовательности функций, соответствующих элементам кольца R* *.

---

* Эта теорема доказана совместно с Г. Е. Шиловым. Доказательство ее будет приведено в совместной работе обоих авторов.

Отсюда следует, что если в кольце R введена норма так, что из равномерной сходимости функций $x_n(M)$ следует сходимость элементов x_n по норме (для чего достаточно например потребовать $\|x^2\| = \|x\|^2$), то кольцо R состоит из всех непрерывных на $\mathfrak{M}$ функций. (В кольце R предполагается выполненным условие теоремы 7.)

Оказывается, что во многих случаях запас функций $x(M)$ однозначно определяет кольцо. Это следует из теоремы 8:

Теорема 8. *Пусть даны два нормированных кольца R_1 и R_2. Пусть пересечение всех максимальных идеалов в каждом из них есть нулевой идеал. Тогда из алгебраического изоморфизма колец R_1 и R_2 следует их непрерывный изоморфизм.*

Институт математики
Московского государственного университета.

Поступило
27 III 1939.