Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 5

*МАТЕМАТИКА*

Я. Л. ГЕРОНИМУС

# ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ НА НЕСКОЛЬКИХ КОНТУРАХ

*(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 III 1939)*

Рассмотрим в плоскости $z$ аналитический контур $C$ и вес $n(z)$ положительный и непрерывный на $C$; существует аналитическая функция $D(z)$, регулярная и неравная нулю вне $C$ (включая $z=\infty$), причем [1]

$$\lim_{z\to z_0} |D(z)|^2 = n(z_0), \qquad (z \text{ — вне } C, \quad z_0 \text{ — на } C). \tag{1}$$

Пусть функция $w=\gamma(z)$ отображает взаимнооднозначно и конформно область вне $C$ на область $|w|>r_0$, причем точки на бесконечности соответствуют друг другу и кроме того

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\gamma(z)}{z} = 1. \tag{2}$$

Обозначим через $C_r$ кривые плоскости $z$, в которые переходят круги $|w|=r>r_0$ (кривые уровня).

Теорема 1. *Отношения моментов*

$$\frac{\gamma_k(r)}{\gamma_0(r)}, \qquad (k=1, 2, \ldots), \tag{3}$$

*где*

$$\gamma_k(r) = \int\limits_{C_r} |D(z)|^2 z^k |dz|, \qquad (k=0, 1, 2, \ldots), \quad r \geqslant r_0, \tag{4}$$

*не зависят от $r$ тогда и только тогда, когда контур $C$ и вес $n(z)$ такого типа *:*

I. *Контур $C$ является кривой семейства $C_r$*

$$C_r: \qquad \left| \frac{G_k(z)+\sqrt{G_k^2(z)-4a^{2k}}}{2} \right| = r^k, \tag{5}$$

*[причем $G_k(z)$ — произвольный полином степени $k$ со старшим коэффициентом, равным единице]; контур $C$ соответствует тому значению*

* Вес $n(z)$ отличается от $|D(z)|^2$ только множителями, сохраняющими на $C_r$ постоянное значение.

*$r=r_0$, при котором наименьший выпуклый многоугольник, содержащий все корни $G_k(z)$, лежит внутри $C_{r_0}$, а $r_0 > |\alpha| \geqslant 0$; вес $n(z)$ дается формулами*

$$n(z)=\left|\sqrt{\frac{G_k(z)+2\alpha^k}{G_k(z)-2\alpha^k}}\,G_k'(z)\right|, \qquad 0<|\alpha|<r_0; \tag{6'}$$

$$n(z)=\left|\frac{G_k'(z)}{[G_k(z)-\lambda^k]^2}\right|, \quad \alpha=0, \quad |\lambda|\leqslant r_0. \tag{6''}$$

II. *Контур $C$ произволен, а $n(z)=|\gamma'(z)|$.*

Рассмотрим теперь два вида ортогональности системы полиномов $\{P_n(z;r)\}$ на контурах $C_r\ (r\geqslant r_0)$

$$\int\limits_{C_r}|D(z)|^2\,P_n(z;r)\,\overline{P_m(z;r)}\,|dz|\begin{cases}=0, & n\neq m;\\ \neq 0, & n=m;\end{cases} \tag{A}$$

$$\int\limits_{C_r}|D(z)|^2\,P_n(z;r)\,P_m(z;r)\,|dz|\begin{cases}=0, & n\neq m;\\ \neq 0, & n=m\,^*.\end{cases} \tag{B}$$

Рассмотрим также функции второго рода:

$$Q_n(y;r)=\int\limits_{C_r}\frac{|D(z)|^2\,\overline{P_n(z;r)}\,|dz|}{y-z}, \quad (n=0,1,2,\ldots); \quad (y-\text{вне } C_r), \tag{7}$$

причем система $\{P_n(z;r)\}$ $A$-ортогональна.

Теорема 1 тесно связана с вопросом об одновременной ортогональности системы $\{P_n(z;r_0)\}$ на всех $C_r\ (r>r_0)$—имеет место следующая

Теорема 2. *Система полиномов, $B$-ортогональная на $C$, будет $B$-ортогональна на всех $C_r\ (r>r_0)$ тогда и только тогда, когда контур $C$ дается формулой (5), а вес $n(z)$—формулой (6′), или же когда контур $C$ произволен, а вес $n(z)=|\gamma'(z)|$.*

Примечание 1. Если $Q_0(y;r_0)$—рациональная дробь, то систему полиномов, $B$-ортогональную на $C$, невозможно построить, поэтому мы исключаем случай, когда $n(z)$ имеет значение (6″), а также случай, когда $\frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)}$—рациональная дробь.

Примечание 2. Независимость от $r$ отношений

$$\frac{\gamma_k(r)}{\gamma_0(r)}, \qquad (k=1,2,3,\ldots), \qquad r>r_0,$$

является необходимым, но недостаточным условием того, чтобы система полиномов, $A$-ортогональная на $C$, была бы $A$-ортогональна на всех $C_r$; это условие эквивалентно следующему условию для функций второго рода**

$$Q_0(y;r)=f_0(r)\,Q_0(y;r_0), \qquad r>r_0; \tag{8}$$

условия, необходимые и достаточные, дает

Теорема 3. *Условия*

$$Q_0(y;r)=f_0(r)\,Q_0(y;r_0); \qquad Q_1(y;r)=f_1(r)\,Q_1(y;r_0), \qquad r>r_0 \tag{9}$$

---

* $B$-ортогональность была рассмотрена J. Walsh'ем и G. Merriman'ом ([2]) совсем недавно.

** $f_n(r)$ и $\varphi_n(r)$ в (11) $(n=0,1,2\ldots)$ являются функциями $r$.

*необходимы и достаточны для $A$-ортогональности на всех $C_r$ системы полиномов, $A$-ортогональной на $C$.*

Задача об $A$-ортогональности системы полиномов на всех $C_r$ $(r \geqslant r_0)$ была решена G. Szegö [1],—он нашел пять типов полиномов, обладающих этим свойством. Теорема 3 дает решение этой же задачи при значительно меньших требованиях.

Действительно, из разложения *

$$\frac{1}{y-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(z;r)\,Q_n(y;r)}{h_n(r)}, \quad h_n(r)=\int\limits_{C_r}|D(z)|^2\,|P_n(z;r)|^2\,|dz|, \quad (10)$$

мы видим, что условие $A$-ортогональности на всех $C_r\,(r>r_0)$ системы $\{P_n(z;r_0)\}$, $A$-ортогональной на $C$,

$$P_n(z;r)=\varphi_n(r)\,P_n(z;r_0), \quad (n=0,1,2,\ldots), \quad r>r_0, \qquad (11)$$

сразу дает условия для функций второго рода

$$Q_n(y;r)=f_n(r)\,Q_n(y;r_0), \quad (n=0,1,2,\ldots), \quad r>r_0. \qquad (12)$$

Наша теорема 3 показывает, что выполнение этих условий при $n=0$ и $n=1$ влечет за собой выполнение их для всех целых неотрицательных значений $n$.

Институт математики и механики
при Харьковском государственном университете.

Поступило
26 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Szegö, Trans. Amer. Math. Soc., **37** (1935). [2] J. Walsh a. G. Merriman, Duke Math. Journal, **3** (1937).

* Это разложение равномерно сходится, если $y$ вне или на $C_\rho\,(\rho>r>r_0)$, а $z$ внутри или на $C_r$.