Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. Л. ФРАНК

ПРИБЛИЖЕНИЕ ОДНОСВЯЗНЫХ МНОГОГРАННИКОВ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 III 1939)

Расположим односвязный многогранник так, чтобы одна из его вершин S_0 находилась в начале координат. Все грани считаем треугольниками, для чего в случае, если грань имеет более трех сторон, проводим диагонали, разбивающие ее на треугольники. Пусть в S_0 сходится λ_0 граней. Исключаем все эти грани и отображаем остальную часть поверхности многогранника, представляющую собою незамкнутую односвязную область, взаимно однозначно на плоскость u, v.

На плоскости u, v получаем область ω, состоящую из сетки треугольников, ограниченной многоугольником с λ_0 сторонами. Вершины треугольников сети располагаем в целочисленных точках плоскости u, v, что, как нетрудно показать, всегда возможно.

Занумеруем все $f-\lambda_0$ граней многогранника и все соответствующие им треугольники отображения одинаковыми номерами. Грани M_k с вершинами M_{k1}, M_{k2}, M_{k3} соответствует треугольник $N_k(N_{k1}, N_{k2}, N_{k3})$, причем для M_{ks} имеем:

$$\text{для } N_{ks} \qquad \left.\begin{matrix} \xi=a_{ks}, & \eta=b_{ks}, & \zeta=c_{ks} \\ u=\alpha_{ks}, & v=\beta_{ks} & \end{matrix}\right\} \; s=1, 2, 3.$$

Тогда уравнение плоскости грани M_k можно написать в виде:

$$\xi_k=\begin{vmatrix} u & v & 1 & 0 \\ \alpha_{k1} & \beta_{k1} & 1 & a_{k1} \\ \alpha_{k2} & \beta_{k2} & 1 & a_{k2} \\ \alpha_{k3} & \beta_{k3} & 1 & a_{k3} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{D_k}, \quad \text{где } D_k=\begin{vmatrix} \alpha_{k1} & \beta_{k1} & 1 \\ \alpha_{k2} & \beta_{k2} & 1 \\ \alpha_{k3} & \beta_{k3} & 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

и аналогично для η_k и ζ_k с заменой букв a на b и c. Нумерацию вершин каждой из граней берем так, чтобы $D_k > 0$.

С другой стороны, рассматривая данный многогранник, как многовершинник с e вершинами, занумеруем все его вершины и вершины сетки отображения. Число внутренних вершин сетки будет очевидно равно $e-\lambda_0-1$.

Вершина S_i, к которой принадлежат λ_i граней, имеет координаты a_i, b_i, c_i, а соответствующая ей вершина отображения T_i имеет координаты α_i, β_i (само собою разумеется, что при этом одна и та же вершина будет обозначена различным образом, смотря по тому, считается ли она вершиной одной из граней многогранника или вершиной многовершинника).

Введем обозначения:

$$\sigma_{k1}=\left[1-\frac{D_{k1}}{D_k}\right]^{D_k};\quad \sigma_{k2}=\left[1-\frac{D_{k2}}{D_k}\right]^{D_k};\quad \sigma_{k3}=\left[1-\frac{D_{k3}}{D_k}\right]^{D_k}, \tag{2}$$

где D_k имеет значение (1), а

$$D_{k1}=\begin{vmatrix} u & v & 1\\ \alpha_{k2} & \beta_{k2} & 1\\ \alpha_{k3} & \beta_{k3} & 1\end{vmatrix};\quad D_{k2}=\begin{vmatrix} \alpha_{k1} & \beta_{k1} & 1\\ u & v & 1\\ \alpha_{k3} & \beta_{k3} & 1\end{vmatrix};\quad D_{k3}=\begin{vmatrix} \alpha_{k1} & \beta_{k1} & 1\\ \alpha_{k2} & \beta_{k2} & 1\\ u & v & 1\end{vmatrix}, \tag{3}$$

т. е. представляют собою удвоенные площади треугольников, в каждом из которых вместо одной из вершин N_{k1}, N_{k2}, N_{k3} взята точка N с текущими координатами u, v; кроме того примем:

$$\tau_{p1}^{(i)}=\left[\frac{1-\dfrac{D_{p1}^{(i)}}{D_p^{(i)}}}{1+\dfrac{D_{p1}^{(i)}}{D_p^{(i)}}}\right]^{D_p^{(i)}};\qquad \tau_{p2}^{(i)}=\left[\frac{1-\dfrac{D_{p2}^{(i)}}{D_p^{(i)}}}{1+\dfrac{D_{p2}^{(i)}}{D_p^{(i)}}}\right]^{D_p^{(i)}}, \tag{4}$$

где $D_p^{(i)}$ — удвоенная площадь одного из треугольников, прилежащих к вершине T_i, а $D_{p1}^{(i)}$ и $D_{p2}^{(i)}$ — соответственно удвоенные площади треугольников, в которых одна из вершин, не совпадающих с вершиной T_i, заменена точкой $N(u, v)$. Нумерация вершин каждого из треугольников $N_p^{(i)}$ взята так, чтобы $D_p^{(i)}>0$.

Возьмем уравнения:

$$x=\sum_{k=1}^{k=f-\lambda_0}\frac{\xi_k}{1+(\sigma_{k1})^{4n}+(\sigma_{k2})^{4n}+(\sigma_{k3})^{4n}}+$$
$$+\sum_{i=1}^{i=e-\lambda_0-1}a_i\left[1-\sum_{p=1}^{p=\lambda_i}\frac{1}{1+(\tau_{p1}^{(i)})^{2n}+(\tau_{p2}^{(i)})^{2n}}\right] \tag{5}$$

и такие же выражения для y и z с заменой ξ_k на η_k и ζ_k и a_i на b_i и c_i.

Можно показать, что уравнения (5) представляют поверхность, равномерно приближающую многогранник, причем порядок приближения внутри всей области Ω не ниже $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Обозначим первую сумму (5) через

$$x^{(1)}=\sum_{k=1}^{k=f-\lambda_0}x_k^{(i)}$$

и вторую через:

$$x^{(2)}=\sum a_i\left[1-\sum_{p=1}^{p=\lambda_i}\mu_p\right].$$

1. Если точка N находится внутри треугольника N_k, то:

$$0<\frac{D_{ks}}{D_k}<1;\quad (\sigma_{ks})^{4n}<e^{-4nD_{ks}},\quad s=1,2,3,$$

и таким образом $x_k^{(1)}=\xi_k+O(e^{-n\delta})$, где δ — величина, не превышающая ни одной из величин $4D_{ks}$.

Для остальных членов суммы $x^{(1)}$, соответствующих другим треугольникам, для которых точка N находится вне их площади, как нетрудно показать, по крайней мере одна из удвоенных площадей D_{l1}, D_{l2}, D_{l3} должна быть отрицательной и притом по модулю не меньше некоторой конечной положительной величины $\frac{\delta}{4}$.

Отсюда следует, что одна из трех величин

$$(\sigma_{ls})^{4n} > 2^{n\delta}$$

и следовательно

$$x^{(1)}=\xi_k+O(2^{-n\delta}).$$

2. Если точка N находится на стороне треугольника N_k, принадлежащей также треугольнику N_{k+1}, то в выражениях для $x_k^{(1)}$ и $x_{k+1}^{(1)}$ одно из значений σ обращается в единицу, и

$$x_k^{(1)}+x_{k+1}^{(1)}=\frac{\xi_k}{2+O(e^{-n\delta})}+\frac{\xi_{k+1}}{2+O(e^{-n\delta})}=\xi+O(e^{-n\delta}),$$

так как в этом случае $\xi_k=\xi_{k+1}=\xi$.

Остальные члены суммы $x^{(1)}$ дадут, как и в первом случае, величину порядка $(2^{-n\delta})$.

Наихудшее приближение, как нетрудно доказать, получается, когда точка N находится около стороны треугольника, причем ее расстояние само имеет порядок $\left(\frac{1}{n}\right)$. В этом случае одно из D_{ks}, например $D_{k1}=\frac{\alpha}{n}$, где $\alpha>0$, и для соседнего треугольника одно, например $D_{k+1,2}=-\frac{\alpha}{n}$, откуда:

$$(\sigma_{k,1})^{4n}\approx e^{-4\alpha}\left[1-\frac{2\alpha^2}{nD_k}\right]$$

и

$$(\sigma_{k+1,2})^{4n}\approx e^{4\alpha}\left[1-\frac{2\alpha^2}{nD_{k+1}}\right]$$

и следовательно

$$x_k^{(1)}+x_{k+1}^{(1)}=\frac{\xi_k}{1+e^{-4\alpha}+O\left(\frac{1}{n}\right)}+\frac{\xi_{k+1}}{1+e^{4\alpha}+O\left(\frac{1}{n}\right)},$$

и так как в этом случае

$$\xi_{k+1}=\xi_k+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$x_k^{(1)}+x_k^{(2)}=\xi_k+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

а все остальные члены дадут величины высших порядков.

Для определения второй суммы $x^{(2)}$, если точка N не совпадает ни с одной из вершин, надо принять во внимание, что точка N находится по отношению каждой вершины либо внутри одного из углов, образованных парой полупрямых, выходящих из этой вершины и совпадающих по направлению с двумя сторонами одного из треугольников, либо на одной из таких полупрямых.

В первом случае для одного из треугольников, например $N_p^{(i)}$, обе площади $D_{p1}^{(i)} > 0$ и $D_{p2}^{(i)} > 0$ и следовательно, как нетрудно показать, $(\tau_{p1}^{(i)})^{2n} < 2^{-n\delta}$ и $(\tau_{p2}^{(i)})^{2n} < 2^{-n\delta}$, а для всех остальных треугольников одно из значений $D_{qs}^{(i)} < 0$ и $(\tau_{qs}^{(i)})^{2n} > 2^{n\delta}$; $s = 1, 2$, и таким образом $\mu_p^{(i)} = 1 + O(2^{-n\delta})$, а все остальные $\lambda_i - 1$ члены суммы $\sum \mu_p^{(i)}$ например $\mu_q^{(i)} = O(2^{-n\delta})$, где $q \neq p$, и так как то же самое будет иметь место для всех вершин, то $x^{(2)} = O(2^{-n\delta})$.

То же самое получится, если N лежит на стороне или ее продолжении, но только тогда сумма двух μ для смежных треугольников дает:

$$\mu_p + \mu_{p+1} = 1 + O(2^{-n\delta}),$$

а все остальное остается без изменения.

Если наконец точка N приближается к стороне, и ее расстояние имеет порядок $\left(\frac{1}{n}\right)$, то, как нетрудно показать, $x^{(2)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. Последний случай, если точка N находится в вершине, т. е. $\xi = a_i$, то для всех треугольников, окружающих эту вершину, в выражении для $x^{(1)}$ две из трех величин σ_{ks} $(s = 1, 2, 3)$ обращаются в единицы, а третья в нуль, и следовательно

$$x^{(1)} = \lambda_i \frac{a_i}{3} + O(2^{-n\delta}).$$

Но одновременно для тех же треугольников все τ обращаются в единицы и

$$x^{(2)} + a_i\left(1 - \lambda_i \frac{1}{3}\right) + O(2^{-n\delta}),$$

откуда

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} = a_i + O(2^{-n\delta}).$$

Аналогично в случае, когда точка N находится на расстоянии порядка $\left(\frac{1}{n}\right)$ от вершины T_i, что является худшим случаем, получим:

$$x^{(1)} + x^{(2)} = a_i + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Приближение к ребрам, являющимся границей области Ω, получается еще слабее, а именно порядка $\frac{1}{n^\beta}$, где β — правильная дробь, сколь угодно близкая к единице.

Вдоль граней и ребер, имеющих общую вершину в S_0, как и в самой вершине S_0, порядок приближения не ниже $\frac{1}{n}$.

Для незамкнутой односвязной многогранной поверхности можно путем двойного обхода такой поверхности получить приближение с помощью тех же формул. Для многосвязного многогранника надо путем разрезов превратить его в незамкнутую односвязную поверхность и тогда получить приближение.

Тот же метод позволяет получить приближение однозначной функции $z = f(x, y)$ для некоторой области $a < x < b$ $c < y < d$, если функция z во всей области имеет непрерывные первые производные и ограниченные вторые производные.

Поступило
26 III 1939.