Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. ЮДИН

РЕШЕНИЕ ДВУХ ПРОБЛЕМ ТЕОРИИ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 III 1939)

Настоящая заметка посвящена решению двух проблем, поставленных Л. В. Канторовичем, именно установлению того, что: 1) всякое линейное конечно-мерное полуупорядоченное пространство изоморфно эвклидову; 2) всякое соотношение, тождественно выполняющееся для вещественных чисел, остается справедливым, если аргументы заменить элементами любого полуупорядоченного пространства. Обе эти проблемы связываются общим методом решения.

Кроме обычных топологических обозначений [1] будут употребляться следующие: $L(M)$ — линейный носитель множества M; $[M]$ — выпуклая оболочка M; $M+(y)$ — множество, получающееся от присоединения к M элемента y, $M+y=\underset{x}{\mathcal{E}}(x-y\in M)$; $(x\rightarrow y)$ — луч, выходящий из x и идущий через y.

Будем рассматривать линейные полуупорядоченные пространства, в которых выполняются аксиомы [2]:

I. $y>0$ исключает $y=0$.

II. Если $y_1>0$, $y_2>0$, то и $y_1+y_2>0$.

III. Для любого y существует $\bar{y}>0$ такой, что $\bar{y}-y\geqslant 0$.

IV. Если $y>0$ и $\lambda>0$, то и $\lambda y>0$.

Такие пространства будем называть K_4^-. Если вместо III выполнено: $\mathrm{III_a}$ для любого y существует $\bar{y}=\sup(y,0)$, то назовем пространство K_4.

В рассматриваемых пространствах вводятся [2] понятия $<$ и inf, из очевидных свойств которых отметим: $-y_1<-y_2$ эквивалентно $y_1>y_2$, $\inf(\{y_i\})=-\sup(\{y_i\})$.

Под изоморфизмом двух линейных полуупорядоченных пространств Y_1, Y_2 понимается такое одноoднозначное отображение, которое сохраняет линейность и соотношение $>$.

Конечно-мерным полуупорядоченным эвклидовым пространством (R_n) называется эвклидово пространство, в котором $x(x_1, x_2, \ldots x_n)>0$, если $x_i\geqslant 0$, $i=1, 2, \ldots n$, и $x_i>0$ хоть для одного i.

Очевидно, что исследование линейных конечно-мерных полуупорядоченных пространств сводится к исследованию эвклидовых пространств, некоторым образом полуупорядоченных.

Легко доказывается, что линейное полуупорядоченное пространство Y будет K_4^- тогда и только тогда, когда множество его положительных элементов M удовлетворяет условиям:

a) M — конус с вершиной в 0, причем $0 \overline{\in} M$,

b) M — выпукло,

c) для любой прямой p существует ей параллельная p' ($p' \parallel p$) такая, что $p' \cdot M$ содержит хотя бы два различных элемента.

Также нетрудно показать, что если Y — конечно-мерное пространство, то c) можно заменить на c') M не лежит в линейном множестве меньшего числа измерений, чем Y, что можно записать в топологических символах, как $\underline{M} \neq 0$ (все топологические понятия относятся к топологии, определяемой координатами в конечно-мерном пространстве).

Множество положительных элементов вместе с 0 будем называть положительным определяющим конусом и обозначать $P_0^+(Y)$. Множества $P_0^- = \underset{y}{\mathscr{E}}(-y \in P_0^+) = \underset{y}{\mathscr{E}}(y \leqslant 0)$, $P_y^{\pm} = P_0^{+} + y$ также будут называться определяющими конусами. Определяющие конусы будут рассматриваться не только как множества точек, но и как множества лучей, выходящих из вершины. Условия a) и b) дают нам, что к определяющему конусу не могут принадлежать два таких противоположных луча.

Обратим внимание на то, что существование c $c = \sup(a; b)$ эквивалентно $P_c^+ = P_a^+ \cdot P_b^+$. Откуда аксиома III_a равносильна тому, что пересечение двух положительных (отрицательных) определяющих конусов есть определяющий конус.

Рассмотрим Y_n n-мерное линейное, полуупорядоченное пространство, будем говорить, что Y_n — особенное, если в Y_n существует отрицательный элемент, к которому сходится (по координатам) последовательность положительных элементов.

Укажем два примера особенных пространств K_4: 1) на плоскости за множество положительных элементов берутся точки, для которых $x > 0$ или $x = 0$, $y > 0$; 2) в трехмерном пространстве положительный определяющий конус состоит из точек, для которых $y > 0$, $z \geqslant 0$ или $y = 0$, $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Лемма. *Если Y_n n-мерное, не особенное пространство K_4, то $P_0^+(Y_n)$ замкнуто.*

Доказательство леммы опустим.

Пусть M — подмножество конечно-мерного пространства, обозначим через $f(M)$ границу M.

Будем говорить, что поверхность (коническая поверхность) линейно разбивается двумя точками a, b (двумя лучами $\vec{a}$, $\vec{b}$), если для любой другой точки поверхности c (любого луча $\vec{c}$] либо $[a, c]$ ($[\vec{c}, \vec{a}]$), либо $[bc]$ ($[\vec{b}\, \vec{c}]$) принадлежат рассматриваемой поверхности.

Основная лемма. *Пусть Y_n n-мерное пространство K_4^- $a > 0$, $b > 0$; $\inf(a, b) = 0$. Тогда $f(P_0^+)$ линейно разбивается лучами $(0 \to a)$, $(0 \to b)$.*

Так как $0 = \inf(a, b)$, то $P_0^- = P_a^- \cdot P_b^-$, а тогда, как легко заметить:

$$f(P_0^-) \subset f(P_a^-) + f(P_b^-).$$

Рассмотрим произвольный элемент $y \in f(P_0^+) - (0)$, для него

$$-y \in f(P_0^-)$$

и либо

$$-y \in f(P_a^-) \qquad (1_1)$$

либо

$$-y \in f(\overline{P_b^-}). \tag{1_2}$$

Если выполнено (1_1), то $[0, -\lambda y]$ $(\lambda > 1)$ принадлежит выпуклому множеству $\overline{P_a^-}$ и внутренняя точка этого отрезка принадлежит границе множества (так как граница выпуклого множества совпадает с границей его замыкания). Тогда весь отрезок принадлежит границе и $(0 \to -y) \subset f(P_a^-)$ аналогично $(a \to -\lambda y) \subset f(P_a^-)$ при всех $\lambda > 0$, т. е. совокупность этих лучей

$$[(a \to 0), (a \to a - y)] \subset f(P_a^-),$$

что дает

$$[(0 \to a), (0 \to y)] \subset f(P_0^+), \tag{2_1}$$

если же выполнено (1_2), то аналогично получим:

$$[(0 \to b), (0 \to y)] \subset f(P_0^+), \text{ что и требовалось доказать.} \tag{2_2}$$

Из понятия экстремума не трудно получить следующие свойства:

1. Если для множества M существует $\inf M$; $M \subset P_y^+$ и P_y^+ нельзя параллельно продвинуть ни по какому направлению, ему принадлежащему, так, чтобы M продолжало оставаться в определяющем конусе, то $y = \inf M$.

2. Если $y = \inf M$, то соблюдено соотношение $M \subset P_y^+$ и определяющий конус можно двигать, сохраняя это соотношение только по направлениям, принадлежащим отрицательному определяющему конусу.

Для конечно-мерного пространства без особого труда получается:

3. Если $x \in f(P_y^+)$, то $\overline{P_y^+}$ можно двигать так, чтобы x оставалось в нем только по тем его направлениям, которые лежат в опорной гиперплоскости, проходящей через x.

Теорема 1. *Если Y_n n-мерное, не особенное пространство K_4, то Y_n изоморфно R_n.*

Пользуясь леммой, нетрудно показать, что можно провести $(n-1)$-мерную гиперплоскость L так, что $V = P_0^+$. L представляет собой выпуклое ограниченное $(n-1)$-мерное тело.

Рассмотрим точку $a \in f(V)$ (граница берется в L), пусть через a проходит только одна опорная гиперплоскость (касательная гиперплоскость) T. Существует опорная к V гиперплоскость $T' \parallel T$, не совпадающая с T, пусть b будет одна из точек ее касания. Тогда на основании свойств 1 и 3 получается, что $\inf(a, b) = 0$. Обращаясь к основной лемме, замечаем, что для $-y = -a$ не выполняется (1_2), так как оно повлекло бы за собой (2_2), из которого получилось бы, что T' совпадает с T. Тогда $-a \in \underline{P_b^-}$, и существует с центром в $-a$ шар $U(-a) \subset \underline{P_b^-}$. Обозначая $U(a) = \underset{x}{\mathscr{E}}(-x \in U(-a))$, получим, что для любого $x \in f(V)\, U(a)$, $[a, x] \subset f(V)$, и тогда $f(V)\, U(V)(a) \subset T$.

Заметим, что у ограниченного выпуклого $(n-1)$-мерного тела всегда существует n независимых касательных гиперплоскости $T_1, T_2, \dots T_n$. Действительно, из теории выпуклых тел известно, что множество точек границы выпуклого тела, в которых существует касательная гиперплоскость, всюду плотно на этой границе [3]. Пользуясь этим, легко построить требуемые n независимых касательных. Первую берем произвольно. Если построено $k < n$ касательных, то проведем прямую через одну из точек x, общих всем k касательным (пространство рассматривается как проективное), и какую-нибудь внутреннюю точку тела. Эта прямая имеет две точки сечения с границей тела. Возьмем ту из этих точек, которая не совпадает с x. Тогда касательная, проведенная через точку, находящуюся в достаточно малой окрестности этой точки сечения, не может проходить через x. Так построенные n касательных будут независимы, т. е. не будут иметь ни одной точки, им всем общей. Пусть x_i $(i=1, \ldots n)$ точка, в которой T_i является касательной. Тогда существуют $U(x_i)$, для которых $f(V)U(x_i) \subset T_i$.

Проектируя L из 0 и обозначая через $\mathbf{T}_i$ $(n-1)$-мерную гиперплоскость, соответствующую T_i, получим $f(P_0^+)\,U(x_i) \subset \mathbf{T}_i$, откуда x_i — внутренняя точка $P_0^+\,\mathbf{T}_i$ относительно $\mathbf{T}_i$. Пользуясь этим результатом и свойствами 3, 1, 2, получаем:

$$P_0^+ \cdot \prod_{i \neq j} \mathbf{T}_i = \vec{x}_j,$$

где $\vec{x}_j$ представляет собой луч, выходящий из 0.

Последнее позволяет нам заключить, что

$$P_0^+ = [\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_n],$$

а это и означает, что Y_n изоморфно R_n.

Линейное полуупорядоченное пространство Y называется не особенным, если всякое его конечно-мерное линейное подпространство, проходящее через 0, не особенное.

Если Y — не особенное пространство K_4 и L — его n-мерное подпространство $0 \in L$, то можно показать аналогично лемме, что $P_0^+(L) = L \cdot P_0^+(Y)$ замкнуто.

Т е о р е м а 2. *Y не особенное пространство K_4. $F_\alpha = F_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_k)$ $(\alpha=1,\ldots t)$ представляют собой выражения с конечным числом: элементов, знаков $+$, $-$ и* inf, sup. *Если из*

$$F_\alpha = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots t-1 \tag{3}$$

следует

$$F_t = 0, \tag{4}$$

когда x_i—вещественные числа, то то же самое справедливо, если элементы берутся из Y.

Прежде всего отметим, что теорема очевидна, если Y изоморфно R_n.

Пользуясь свойствами экстремумов $\sup(\{y_i\}) = -\inf(\{-y_i\})$, $\inf(a, b, c) = \inf(a, \inf(b, c))$ ([2]), приведем F_α к $\overline{F}_\alpha = F_\alpha$, в котором отсутствует sup, а inf берется только от двух элементов.

Возьмем в Y произвольные элементы $x_1, x_2, \ldots x_k$, добавим к ним элементы $x_{k+1}, \ldots x_e$, представляющие собой всевозможные выражения из $x_1, \ldots x_k$, входящие в $\overline{F}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots t$. Таких элементов конечное число.

Рассмотрим полуупорядоченное пространство Y_m, $Y_m = L(x_1, \ldots x_2)$, в котором полуупорядочение перенесено из Y.

Все тройки из $x_1, \ldots x_e$, связанные соотношением $\inf(x_\beta, x_\gamma) = x_\delta$, обозначим a_i^1, a_i^2, b_i $(i=1, \ldots p)$, тогда

$$\inf(a_i^1, a_i^2) = b_i. \tag{5}$$

Обозначим $c_i^\varepsilon = a_i^\varepsilon - b_i$. Тогда (5) будет эквивалентно:

$$\inf(c_i^1, c_i^2) = 0. \tag{6}$$

Аналогично построению Y_m построим полуупорядоченное пространство $L=L(c_1^1, \dots c_p^1, c_1^2, \dots c_p^2, 0)$.

Очевидно, что равенство (6) будет выполнено и в Y_m, и в L.

Разобьем все i на два класса: к первому отнесем те, для которых $c_i^\varepsilon=0$, $\varepsilon=1$ или 2, а ко вторым остальные. По методу своего построения L оказывается не особенным пространством K_4^-, кроме того, по отмеченному перед теоремой $P_0^+(L)$ замкнуто. Тогда по основной лемме мы получим, что любая гиперплоскость $\mathbf{T}$, касательная к $P_0^+(L)$, обязательно проходит через c_i^ε, где $\varepsilon=1$ или 2 и i — второго класса. Пользуясь построением, проведенным в аналогичном случае в прошлой теореме, построим n независимых касательных (n — число измерений L). Эти n касательных разбивают L на 2^n конусов. Обозначим через P тот из них, в котором содержится $P_0^+(L)$, и возьмем его за определяющий конус полуупорядоченного пространства $\overline{L}$. $\overline{L}$ будет изоморфно R_n. Пользуясь свойствами 3 и 1, заметим, что соотношение (6) выполнено в $\overline{L}$.

Если m — число измерений Y_m, то добавим $m-n$ лучей, выходящих из 0, расположенных в Y_m и независимых вместе с L. Возьмем выпуклую оболочку этих лучей и $P_0^+(L)$ за определяющий конус полуупорядоченного пространства Y_m. Тогда $\overline{Y}_m$ изоморфно R_m, и в $\overline{Y}_m$ выполнены соотношения (6), а следовательно и (5).

Пусть теперь элементы $x_1, \dots x_k$ выбраны так, что в Y выполнены равенства (3), тогда они будут выполнены и в $\overline{Y}_m$, ибо $F_\alpha(x_1, \dots x_k)$ представляют собой одно и то же как в Y, так и в $\overline{Y}_m$, а тогда в $\overline{Y}_m$ (так как оно изоморфно R_m) выполнено и (4), которое тогда будет выполнено и в Y, что и требовалось доказать.

Замечание. Если в (3) и (4) знаки $=$ будут заменены на $\geqslant$, то теорема также справедлива. Действительно, $F_\alpha \geqslant 0$ эквивалентно $\inf(F_\alpha, 0)=0$.

Отметим, что пространство Y не может быть особенным, если в нем может быть задана сходимость, удовлетворяющая:

A) для любого x $\lambda_n x \longrightarrow 0$, если $\lambda_n \longrightarrow 0$,

B) если $x_n \longrightarrow 0$ и $y_n \longrightarrow 0$, то $x_n+y_n \longrightarrow x+y$,

C) если $x_n \longrightarrow 0$ и $x_n > 0$, то $x \not< 0$.

Этим свойствам удовлетворяет сходимость в пространствах типа B_1 ([4]), а также в пространствах K_5 упорядоченных ([2]), в которых кроме рассматриваемых аксиом I — IV выполнено:

V. Если $y_1, \dots y_n, \dots$ — элементы, меньшие некоторого $\overline{y}$, то существует $\overline{y}=\sup(y_1, \dots y_n, \dots)$.

Институт математики и механики.
Ленинградский университет.

Поступило
25 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

[1] Ф. Хаусдорф, Теория множеств. [2] Л. В. Канторович, Матем. сборн., 2 (44) : 1 (1937). [3] Reidmeister, Math. Ann., 83 (1921). [4] Л. В. Канторович, ДАН, XII, стр. 10 (1936).