Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

О ЦЕНТРЕ ПОДГРУПП СИЛОВА У ПРОСТЫХ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 17 III 1939)

1. Мною была раньше доказана (1) следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — подгруппа индекса k группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\mathfrak{K}$ — подгруппа $\mathfrak{H}$, содержащая коммутант группы $\mathfrak{H}$. Пусть в $\mathfrak{H}$ содержится элемент A, не входящий в $\mathfrak{K}$ и такой, что при любом целом λ все элементы $\mathfrak{H}$, сопряженные с A^λ в $\mathfrak{G}$, входят в систему $\mathfrak{K}A^\lambda$. Пусть A^σ — наименьшая степень A, входящая в $\mathfrak{K}$. Если k не делится на σ, то группа $\mathfrak{G}$ не может быть простой.*

Как было показано L. Weisner'ом и мною (2, 3), эта теорема может быть использована при исследованиях свойств простых групп. Дальнейшие приложения этой теоремы даются в настоящей статье.

2. Пусть $\mathfrak{P}$ — одна из подгрупп Силова порядка p^δ группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\delta n$ и пусть ρ — наименьшее число, для которого $p^\rho - 1$ и n имеют отличного от единицы общего делителя. Пусть группа $\mathfrak{S}$ порядка p^η является центром $\mathfrak{P}$. Пусть фундаментальный базис группы $\mathfrak{S}$ содержит лишь следующие элементы:

множество (A_1) из n_1 элементов порядка p^{α_1},
множество (A_2) из n_2 элементов порядка p^{α_2},
. . . .
. . . .
множество (A_s) из n_s элементов порядка p^{α_s}.

Пусть при этом $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_s$ и $\alpha_{s+1} = 0$.

Введем следующие обозначения:

1) если $1 < i \leqslant s$, то τ_i равно наименьшему из чисел $\alpha_{i-1} - \alpha_i$ и $\alpha_i - \alpha_{i+1}$,
2) если $i = 1$, то $\tau_1 = \alpha_1 - \alpha_2$,
3) если $s = 1$, то $\tau_1 = \alpha_1$.

Докажем следующую лемму:

Лемма. *Для каждого τ_i существуют две характеристические подгруппы:*

$$\mathfrak{A}_i \supset \mathfrak{B}_i$$

группы $\mathfrak{S}$ такие, что факторгруппа $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{B}_i}$ является абелевой группой порядка $p^{n_i\tau_i}$ и типа $(p^{\tau_i}, p^{\tau_i}, \ldots, p^{\tau_i})$. Основные моменты доказательства состоят в следующем [ср. Burnside (4)]. Рассмотрим характеристические подгруппы $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, Υ группы $\mathfrak{S}$, образованные следующим способом:

$\mathfrak{M}$ порождается всеми элементами $\mathfrak{S}$, порядки которых делят p^{α_i},
$\mathfrak{N}$ порождается всеми элементами $\mathfrak{S}$, порядки которых делят $p^{\alpha_i-\tau_i}$,
Υ порождается всеми элементами $\mathfrak{S}$, возвышенными в степень p^{τ_i}.

Фундаментальный базис $\mathfrak{M}$ состоит из элементов $(A_j^{p^{\alpha_j-\alpha_i}})$, $j=1, 2, \ldots$ $\ldots, i-1$, и из элементов (A_j), $j=i, i+1, \ldots, s$.

Фундаментальный базис $\mathfrak{N}$ состоит из элементов $(A_j^{p^{\alpha_j-\alpha_i+\tau_i}})$, $j=1, 2, \ldots$ $\ldots, i$, и из элементов (A_j), $j=i+1, i+2, \ldots, s$.

Фундаментальный базис Υ состоит из элементов $(A_j^{p^{\tau_i}})$, $j=1, 2, 3, \ldots, s$.

Далее фундаментальный базис группы $\Upsilon\mathfrak{N}$ будет состоять из элементов вида:

$$(A_j^{p^{\tau_i}}),\ j=1, 2, \ldots i, \text{ и } (A_j),\ j=i+1,\ i+2, \ldots, s.$$

Рассмотрим фундаментальный базис общего наибольшего делителя $\mathfrak{D}$ групп $\Upsilon\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$. Так как при $j<i$ имеем $\alpha_j-\alpha_i \geqslant \alpha_{i+1}-\alpha_i \geqslant \tau_i$, то фундаментальный базис $\mathfrak{D}$ состоит из элементов: $(A_j^{p^{\alpha_j-\alpha_i}})$ при $j<i$, $(A_i^{p^{\tau_i}})$, и элементов (A_j) при $j>i$.

Так как $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и Υ — характеристические подгруппы $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{D}$ также характеристическая подгруппа. Ясно, что $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{D}$ и что дополнительная группа $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{D}}$ — порядка $p^{n_i\tau_i}$ и типа $(p^{\tau_i}, p^{\tau_i}, \ldots, p^{\tau_i})$.

3. Теорема 2. *Если $\mathfrak{G}$ — простая группа, то из неравенства $n_i<\rho$ следует, что $\tau_i \leqslant \delta-\eta$.*

Предположим, что существует такое i, для которого выполнено неравенство $n_i<\rho$. Согласно вышеприведенной лемме тогда существуют две характеристические подгруппы $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ группы $\mathfrak{S}$ такие, что $\mathfrak{A}_i\supset\mathfrak{B}_i$ и факторгруппа $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{B}_i}$ абелева порядка $p^{n_i\tau_i}$ и типа $(p^{\tau_i}, p^{\tau_i}, \ldots, p^{\tau_i})$.

Рассмотрим разложение $\mathfrak{A}_i$ по $\mathfrak{B}_i$:

$$\mathfrak{A}_i=\mathfrak{B}_i+\mathfrak{B}_iB_2+\ \ldots\ +\mathfrak{B}_iB_b,$$

где $b=p^{n_i\tau_i}$.

Пусть B — один из элементов $B_2, B_3, \ldots, B_b$. Известно ([5]), что все элементы $\mathfrak{S}$, сопряженные с B^λ в группе $\mathfrak{G}$, будут уже сопряжены в нормализаторе (по отношению ко всей группе $\mathfrak{G}$) $\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}$ группы $\mathfrak{P}$. Группа $\mathfrak{A}_i$, как характеристическая подгруппа $\mathfrak{S}$, должна быть в $\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}$ инвариантной. Отсюда следует, что все элементы $\mathfrak{S}$, сопряженные с B^λ в $\mathfrak{G}$, уже содержатся в $\mathfrak{A}_i$, т. е. из

$$G^{-1}B^\lambda G\subset\mathfrak{S};\ G\subset\mathfrak{G}$$

следует, что

$$G^{-1}B^\lambda G=C^{-1}B^\lambda C;\quad C\subset\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}};\quad C^{-1}B^\lambda C\subset\mathfrak{A}_i.$$

Преобразуем все элементы $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{B}_i}$ с помощью элемента C и мы получим некоторый автоморфизм группы $\frac{\mathfrak{A}_i}{\mathfrak{B}_i}$. Порядок элемента C и число

$$(p^{n_i}-1)(p^{n_i-1}-1)\ldots(p-1)$$

взаимно просты, так как $n_i < \rho$. Отсюда следует, что полученный автоморфизм должен быть тождественным автоморфизмом, т. е.

$$C^{-1}\mathfrak{B}_i B^\lambda C = \mathfrak{B}_i B^\lambda$$

или

$$\mathfrak{B}_i C^{-1} B^\lambda C = \mathfrak{B}_i B^\lambda.$$

Отсюда следует, что все элементы $\mathfrak{S}$, сопряжённые с B^λ в $\mathfrak{G}$, входят в систему $\mathfrak{B}_i B^\lambda$. Если теперь предположить, что $\tau_i > \delta - \eta$, то согласно теореме 1 (положив $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{K} = \mathfrak{B}_i$) получим, что $\mathfrak{G}$ не может быть простой. Таким образом теорема 2 доказана.

4. Отметим следующий частный случай предыдущей теоремы. Если $\mathfrak{P}$ — абелева группа, то $\delta = \eta$, и так как все $\tau_i > 0$, то следовательно $n_i \geqslant \rho$. Получается теорема:

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{P}$ порядка p^δ является абелевой подгруппой Силова простой группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\delta n$. Пусть ρ—наименьшее число, для которого $p^\rho - 1$ и n имеют отличный от единицы общий делитель. Тогда число элементов фундаментального базиса $\mathfrak{P}$, имеющих один и тот же порядок, не может быть меньше ρ.*

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Тогда порядки элементов группы $\mathfrak{P}$ не превосходят $\sqrt[\rho]{p^\delta}$.*

5. Теорема 4 является известным уточнением ранее полученной мною ([6]) теоремы:

Пусть $\mathfrak{G}$ — простая группа порядка $p^\delta n$ (p — простое число, n не делится на p, числа n и $p-1$ взаимно просты). Пусть $\mathfrak{P}$ — одна из подгрупп порядка p^δ. Тогда порядки элементов центра группы $\mathfrak{P}$ не превосходят $\sqrt{p^\delta}$.

Поступило
23 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Serge Tchounikhin, Math. Annalen, 112, 02 (1935); см. также S. A. Tchounikhin, Rec. Math. de Moscou, 5 (47), № 3 (1939). [2] S. A. Tchounikhin, C. R. de l'Acad. des Sci. de l'URSS, XX, № 2—3 (1938). [3] Z. Weisner, Duke Math. Journ., 2, № 4 (1936). [4] W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, sec. ed., p. 108—109. [5] W. Burnside, loc. cit., p. 155. [6] Serge Tchounikhin, Math. Annalen, 112, 95 (1935).