Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Г. АРЕНБЕРГ

О СОПРОТИВЛЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ВИБРАТОРА ГЕРЦА

(Представлено академиком М. В. Шулейкиным 15 III 1939)

1. Для подсчета средней мощности электромагнитного излучения (P_Σ) системы, состоящей из зарядов и производимых ими токов, заданной во времени и пространстве, существуют два различных метода. Согласно первому из них, обычно называемому в радиотехнике «методом вектора Пойнтинга» ($\overline{S}$), эта мощность определяется потоком вектора $\overline{S}$ через поверхность, охватывающую излучающую систему. Второй метод, в основном разработанный Л. Бриллюэном [1] и И. Кляцкиным [2], обычно называемый «методом наведенных электродвижущих сил», базируется на учете эдс, возникающих в излучающей системе под влиянием реакции поля, создаваемого этой же системой.

Если в соответствии с уравнениями Лоренца [3] рассматривать вектор электрического поля $\overline{E}$, как сумму двух слагаемых

$$\overline{E}_v = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \overline{E}_s = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{1}$$

первое из которых зависит только от векторного потенциала $\overline{A}$, а второе только от скалярного потенциала φ, то тогда для вектора $\overline{S}$ имеем:

$$\overline{S} = \frac{c}{4\pi}[\overline{E}_v, \overline{H}] + \frac{c}{4\pi}[\overline{E}_s, \overline{H}] = \overline{S}_v + \overline{S}_s, \tag{2}$$

где $\overline{H} = \operatorname{rot}\overline{A}$.

При этом, оказывается, легко показать, что при подсчете излучения элементарного диполя с переменным электрическим моментом [идеализированный вибратор Герца [4]] по методу вектора Пойнтинга достаточно ограничиться лишь учетом вектора $\overline{E}_v$, в то время как при подсчете P_Σ по методу наведенных эдс необходимо учитывать и E_s.

2. В самом деле, ориентируя для простоты вычислений диполь по оси z, получаем, что радиальная компонента вектора $\overline{S}_v$ равна:

$$S_{vr} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \overline{A}}{\partial t}, \operatorname{rot}\overline{A}\right]_r = -\frac{\cos^2\Theta}{4\pi}\cdot\frac{\partial A}{\partial t}\cdot\frac{\partial A}{\partial z} \tag{3}$$

где A — компонента вектора $\overline{A}$ по оси z и Θ — угол «широты». Далее, вводя с помощью соотношения $\overline{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{Z}}{\partial t}$ функцию Герца

$$Z = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},$$

получаем

$$S_{vr}=\frac{\cos^2\Theta}{4\pi c^2}\left[\frac{(f'')^2}{cr^2}+\frac{f'f''}{r^3}\right].$$

Наконец задаваясь, как обычно, гармонической зависимостью

$$f\left(t-\frac{r}{c}\right)=M_0\cos(\omega t-kr)$$

(здесь M_0 — амплитуда электрического момента диполя, ω — угловая частота и $k=\frac{\omega}{c}$ — волновое число), находим:

$$S_{vr}=\frac{\omega M_0^2\cos^2\Theta}{4\pi r^2}\left[\frac{k^3}{2}+\frac{k^3}{2}\cos 2(\omega t-kr)+\frac{k^2}{2r}\sin 2(\omega t-kr)\right]. \quad (4)$$

Интегрирование среднего значения этого выражения по сфере с произвольным радиусом r, превышающим размеры самого диполя, после перехода к практическим единицам приводит к известной формуле:

$$P_\Sigma=40\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \text{ ватт}, \quad (5)$$

согласно которой сопротивление излучения, определяемое как коэффициент при $\frac{I_0^2}{2}$, равно

$$R_\Sigma=80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ ом}. \quad (6)$$

Аналогично для радиальной компоненты вектора $\overline{S}_s$ имеем:

$$S_{sr}=-\frac{c}{4\pi}[\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{rot}\overline{A}]_r. \quad (7)$$

Далее, исходя из соотношения, связывающего скалярный потенциал с функцией Герца, получаем, что

$$\varphi=-\operatorname{div}\overline{Z}=\left(\frac{f'}{cr^2}+\frac{f}{r^3}\right)z=\Psi z$$

и следовательно

$$S_{sr}=-\frac{c}{4\pi}\frac{\partial A}{\partial r}\Psi\cos^2\Theta=\frac{\cos^2\Theta}{4\pi}\left[\frac{f''f'}{c^2r^3}+\frac{(f')^2}{cr^4}+\frac{f''f'}{cr^4}+\frac{f'f}{r^5}\right],$$

откуда для случая гармонических колебаний диполя имеем:

$$S_{sr}=\frac{\omega M_0^2\cos^2\Theta}{4\pi r^2}\left[\frac{k^2}{2r}\sin 2(\omega t-kr)-\frac{k}{r^2}\cos 2(\omega t-kr)-\frac{1}{2r^3}\sin 2(\omega t-kr)\right]. \quad (8)$$

Из полученного выражения следует, что среднее значение этой компоненты вектора Пойнтинга равно нулю, т. е. что вектор $\overline{E}_s$ создает в направлении r лишь «реактивные» («безваттные») потоки энергии, пульсирующие с двойной частотой. Суммирование выражений для S_{vr} и S_{sr}, разумеется, приводит к результатам, получающимся при классическом рассмотрении ([5]). Подобным же путем могут быть получены и выражения для тангенциальных компонент вектора $\overline{S}$, позволяющие сделать некоторые новые выводы, которых мы здесь пока не приводим.

При этом характерно, что поле $\overline{E}_v$ имеет в декартовых координатах компоненты

$$E_{vx}=E_{vy}=0 \quad \text{и} \quad E_{vz}=-\nabla^2 Z,$$

а поле $\overline{E}_s$ — компоненты *

$$E_{sx}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x\cdot\partial z},\quad E_{sy}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial z} \quad \text{и} \quad E_{sz}=\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}.$$

* См. также у М. Планка ([6]).

Переходя к сферической системе координат и подставляя значение Z для тангенциальных компонент вектора $\overline{E}$, получаем выражения

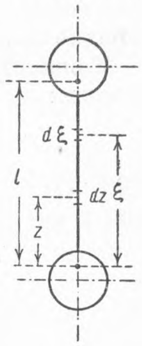
$$E_{v\Theta} = -\frac{\cos\Theta}{c^2 r} f''$$

и (9)

$$E_{s\Theta} = -\frac{\cos\Theta}{r}\left(\frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{cr}\right),$$

легко приводящие к формулам (4) и (8) для S_{vr} и S_{sr}.

Таким образом с точки зрения рассмотренного метода «актуальной» (в смысле получения P_Σ) составляющей электрического поля диполя является лишь компонента $E_{v\Theta}$, создаваемая векторным потенциалом $\overline{A}$, пропорциональным току в диполе *. При этом важно отметить, что эта компонента $E_{v\Theta}$ убывает обратно пропорционально r. При гармонических колебаниях диполя выражение для $E_{v\Theta}$ приводится к виду, известному под названием «формулы идеальной радиопередачи».



3. Рассмотрим теперь вопрос об излучении элементарного вибратора с помощью метода наведенных эдс. Следуя указанным выше работам ([1]) и ([2]), имеем, что при гармонических колебаниях вибратора, показанного на фигуре (т. е. когда ток $i = I_0 \sin\omega t$), эти наведенные эдс, распределенные по длине вибратора, равны:

$$E_{vz} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{A}}{\partial t} = -\frac{\omega I_0}{c^2}\int\limits_0^l \frac{\cos[\omega t - k(\xi - z)]}{\xi - z}\,d\xi$$

и (10)

$$E_{sz} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{I_0}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\cos[\omega t - k(l - z)]}{l - z} - \frac{\cos(\omega t - kz)}{z}\right\},$$

где l — расстояние между электрическими центрами системы.

Очевидно, что при подсчете средней мощности излучения (P_Σ) необходимо учесть лишь «активные» («ваттные») составляющие этих эдс **, пропорциональные $\sin\omega t$, для которых имеем

$$E_{vz}^{(A)} = -\frac{\omega I_0 \sin\omega t}{c^2}\int\limits_0^l \frac{\sin k(\xi - z)}{\xi - z}\,d\xi$$

и (11)

$$E_{sz}^{(A)} = \frac{I_0 \sin\omega t}{\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\sin k(l - z)}{l - z} - \frac{\sin kz}{z}\right].$$

Далее, интегрируя по длине вибратора, нетрудно показать, что амплитуды «активных» составляющих наведенных эдс, обусловленных потенциалами $\overline{A}$ и φ, соответственно равны:

$$\mathscr{E}_{vz_0}^{(A)} = \int\limits_0^l E_{vz_0}^{(A)}\,dz = -\frac{I_0}{c}\left(k^2 l^2 - \frac{k^4 l^4}{6\cdot 3!} + \frac{k^6 l^6}{15\cdot 5!} - \ldots\right)$$

и (12)

$$\mathscr{E}_{sz_0}^{(A)} = \int\limits_0^l E_{sz_0}^{(A)}\,dz = \frac{I_0}{c}\,2\left(\frac{k^2 l^2}{3!} - \frac{k^4 l^4}{5!} + \frac{k^6 l^6}{7!} - \ldots\right)$$

* Отметим, что некоторые высказывания о важности учета вектора $\overline{A}$ в отношении процессов, происходящих в волновой зоне, приведены Беккером в книге Абрагам-Беккер ([7]).

** О «реактивных» («безваттных») составляющих эдс, пропорциональных $\cos\omega t$, будет сообщено в ближайшем будущем.

(здесь $E_{vz_0}^{(A)}$ и $E_{sz_0}^{(A)}$ — амплитуды «активных» составляющих эдс $E_{vz}^{(A)}$ и $E_{sz}^{(A)}$).

Исходя из этих выражений, получаем, что средняя мощность, расходуемая питающим генератором на излучение вибратора, определяется величинами

$$P_{\Sigma v} = -\frac{I_0 \mathcal{E}_{vz_0}^{(A)}}{2} = \frac{I_0^2 R_{\Sigma v}}{2} \quad \text{и} \quad P_{\Sigma s} = -\frac{I_0 \mathcal{E}_{sz_0}^{(A)}}{2} = \frac{I_0^2 R_{\Sigma s}}{2}. \tag{13}$$

Согласно воззрениям академика М. В. Шулейкина [8] величина $P_{\Sigma v}$, обусловленная векторным потенциалом $\overline{A}$, представляет собой мощность, излучаемую вибратором и заимствованную из его магнитного поля. Величина же $P_{\Sigma s}$, обусловленная скалярным потенциалом φ, представляет собой мощность, «непоглощенную» пространством и возвращенную обратно электрическому полю вибратора.

Мощность же, «поглощенная» пространством, определяется выражением:

$$P_{\Sigma} = \frac{I_0^2}{2}(R_{\Sigma v} + R_{\Sigma s}), \tag{14}$$

где

$$R_{\Sigma v} = \frac{1}{c}\left(k^2 l^2 - \frac{k^4 l^4}{6 \cdot 3!} + \frac{k^6 l^6}{15 \cdot 5!} - \ldots\right)$$

и

$$R_{\Sigma s} = -\frac{2}{c}\left(\frac{k^2 l^2}{3!} - \frac{k^4 l^4}{5!} + \frac{k^6 l^6}{7!} - \ldots\right)$$

представляют собой сопротивления излучения, обусловленные потенциалами $\overline{A}$ и φ. Ограничиваясь, в виду крайней малости kl, лишь первыми членами этих рядов, после перехода к практическим единицам получаем выражения

$$R_{\Sigma v} = 120\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ ом} \quad \text{и} \quad R_{\Sigma s} = -40\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ ом}, \tag{15}$$

алгебраическая сумма которых дает формулу (6) для R_{Σ} (см. раздел 2).

Как видим, принципиальное отличие этого результата от приведенного выше заключается в том, что при подсчете P_{Σ} (а следовательно и R_{Σ}) по методу наведенных эдс нельзя ограничиваться лишь учетом влияния одного векторного потенциала $\overline{A}$, а необходимо учитывать также и влияние скалярного потенциала φ, откуда получаются весьма важные выводы. Причины, вызывающие это отличие, а также некоторые другие вопросы, возникающие при данном рассмотрении, требуют дальнейшего исследования, часть которого в настоящее время заканчивается.

Тема настоящего сообщения была предложена мне академиком М. В. Шулейкиным, которому я приношу свою благодарность также и за весьма ценные советы и указания. Ряд важных указаний был получен мною от члена-корреспондента Академии Наук СССР Б. А. Введенского, которому я также весьма благодарен.

Комиссия электросвязи.
Отделение технических наук
Академии Наук СССР.

Поступило
17 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Brillouin, «Radioélectricité», III, Avril (1922). [2] И. Г. Кляцкин, «Телеграфия и телефония без проводов», VIII, № 1(40), стр. 33 (1927). [3] Г. Лоренц, Теория электронов, стр. 36 (1934). [4] Юбилейный сборник «50 лет волн Герца», стр. 92 (1938). [5] Б. А. Введенский, Основы теории распространения радиоволн, стр. 45 (1934). [6] M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung, S. 104 (1906). [7] М. Абрагам и Р. Беккер, Теория электричества, стр. 217 (1939). [8] М. В. Шулейкин, «Электросвязь», № 3, стр. 9 (1938).