Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 4

ГИДРОДИНАМИКА

В. В. ВЕДЕРНИКОВ

К ТЕОРИИ ДРЕНАЖА

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 2 III 1939)

Представляет большой интерес решение задач по движению грунтовых вод, в которых свободная поверхность не является линией тока. Это имеет место тогда, когда на свободную поверхность просачивается сверху или с нее испаряется (или с нее просачивается, как например при неустановившемся просачивании из каналов) расход q (на единицу площади горизонтальной проекции свободной поверхности). В этом случае на свободной поверхности имеет место (фиг., A) условие

$$\operatorname{tg}(\gamma-\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{q}{k}=q_s \quad \text{или} \quad u^2+\left(v-\frac{k+q}{2}\right)^2=\left(\frac{k-q}{2}\right)^2, \tag{1}$$

где γ — угол, составляемый направлением скорости с горизонтом, β — угол, составляемый элементом свободной поверхности с горизонтом, u и v — компоненты скорости фильтрации, k — коэффициент фильтрации и q — величина положительная или отрицательная и вообще переменная вдоль свободной поверхности.

При этом условии на свободной поверхности, так же как и на участке выхода, не постоянны ни $Y=\varphi/k$, ни $X=-\psi/k$. Однако, если остальные части граничного контура являются или прямолинейными участками выхода ($\theta_2=y-Y=\text{const}$), или вертикальными линиями тока ($X=-\psi/k=\text{const}$, $\theta_1=x-X=\text{const}$), или горизонтальными линиями равного потенциала ($Y=\text{const}$, $\theta_2=y-Y=\text{const}$), то решение таких задач, если $q_s=\text{const}$, может быть получено с помощью указанного ранее ([1]) метода.

Поставим следующую задачу (фиг., B): имеется бесконечный ряд дрен диаметром d на глубине h под свободной поверхностью в средине поля между дренами. Расстояние между осями дрен — l. На свободной поверхности в общем случае с учетом влияния капиллярности грунта пьезометрическая высота $\frac{p'}{\gamma}<0$ или $\frac{p'}{\gamma}=-h_v$ ([2]) (h_v — высота зоны капиллярного насыщения). В верхней точке дрены давление воды в общем случае $p'_d\neq 0$. Соответствие точек ясно из фиг., B—F. По формуле Кристоффеля-Шварца получаем:

$$\frac{1}{\gamma_s}=\frac{k}{u-i\,(v-k)}=A\int\limits_0^{\zeta}\frac{(\beta^2-\zeta^2)\cdot\zeta\cdot d\zeta}{\sqrt{\alpha^2-\zeta^2}\cdot\sqrt{\zeta^2-1}\,(\zeta^2-\delta^2)^2}=-$$

$$-\frac{q_s}{1-q_s}\,\frac{\sqrt{\alpha^2-\zeta^2}\cdot\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2-\delta^2}-\frac{i}{1-q_s}, \tag{2}$$

так как

$$\beta^2-\delta^2=\frac{2\cdot(\alpha^2-\delta^2)\cdot(1-\delta^2)}{\alpha^2-2\delta^2+1}. \tag{3}$$

Здесь

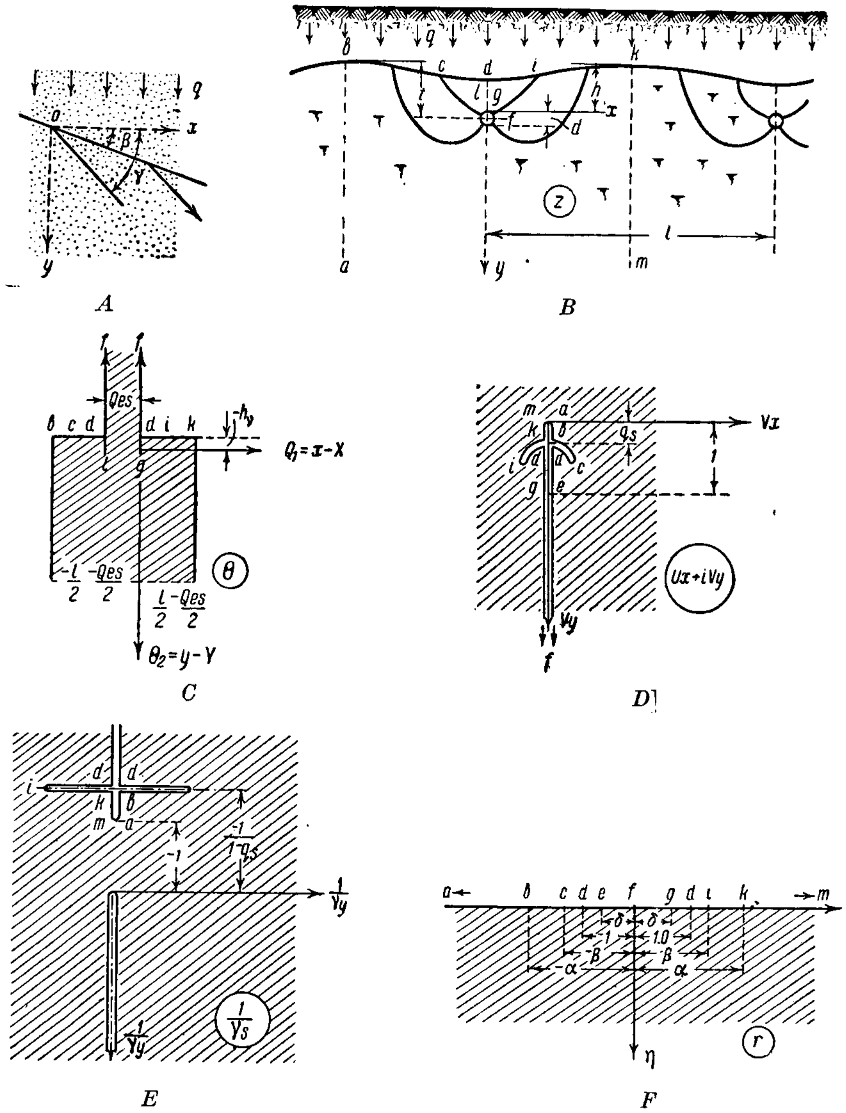
$$\alpha=\frac{1}{q_s}\delta^2.$$

Обозначим

$$l\cdot q_s = Q_s \quad \text{и} \quad h-\frac{p_d'}{\gamma}-h_v=H.$$

Затем по формуле Кристоффеля-Шварца находим

$$\theta = D\int_0^\zeta \frac{(\zeta^2-\delta^2)\cdot d\zeta}{\zeta\sqrt{a^2-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2-1}} + C = \frac{l}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{a^2-1}} -$$
$$-\frac{Q_s}{2\pi}\cdot\arcsin\frac{\zeta^2+a^2\cdot\zeta^2-2a^2}{(a^2-1)\zeta^2} - i\cdot h_v - \frac{Q_s}{4}. \qquad (4)$$



Далее по уравнению (4) (1) будем иметь:

$$z = i\int\frac{1}{\gamma_s}\,d\theta = -\frac{i\cdot Q_s}{(1-q_s)\cdot\pi}\ln\zeta + \frac{1}{1-q_s}\,\theta - i\cdot h_1 + \frac{i\cdot h_v}{1-q_s} \qquad (5)$$

и

$$Z = z-\theta.$$

Расстояние l между дренами и высота h_1 свободной поверхности над дреной определяются уравнениями *:

$$l = \frac{H - h \cdot q_s}{\ln \alpha - \ln \xi_0} \cdot \frac{\pi}{q_s}, \tag{6}$$

$$h_1 = \frac{(h - H) \cdot \ln \alpha - h \cdot (1 - q_s) \cdot \ln \xi_0}{(1 - q_s) \cdot (\ln \alpha - \ln \xi_0)}. \tag{7}$$

Входящие сюда α, ξ_0 и затем η_0 находятся из следующих уравнений:

$$d = \frac{H - h \cdot q_s}{q_s \cdot (\ln \alpha - \ln \xi_0)} \ln \frac{\xi_0}{\eta_0}. \tag{8}$$

$$h - H = \frac{H - h \cdot q_s}{q_s \cdot (\ln \alpha - \ln \xi_0)} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1 - \xi_0^2}{\alpha^2 - 1}} - \frac{H - h \cdot q_s}{2 (\ln \alpha - \ln \xi_0)} \cdot \tag{9}$$

$$\cdot \operatorname{arch} \frac{2\alpha^2 - \xi_0^2 - \alpha^2 \xi_0^2}{(\alpha^2 - 1) \cdot \xi_0^2}.$$

$$h - H + d = \frac{H - h \cdot q_s}{q_s \cdot (\ln \alpha - \ln \xi_0)} \cdot \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1 + \eta_0^2}{\alpha^2 - 1}} + \tag{10}$$

$$+ \frac{H - h q_s}{2 (\ln \alpha - \ln \xi_0)} \operatorname{arch} \frac{2\alpha^2 + \eta_0^2 + \alpha^2 \cdot \eta_0^2}{(\alpha^2 - 1) \cdot \eta_0^2}.$$

Имея данные q_s, p_d', h_v, d и h (или l), можем найти из уравнений (8), (9) и (10) α, ξ_0 и η_0, а затем по уравнениям (6) и (7) h_1 и l (или h).

Для облегчения численного решения задач нами составляются таблицы.

При $p_d' = 0$ и $h_v = 0$ и, если размер дрены равен критическому размеру, то $h_1 = 0$, $\delta = 1$ и $\alpha = \frac{1}{q_s}$.

При этом для расчетов нами составлена следующая табличка:

$q_s = 0$	0.05	0.10	0.20	0.35	0.435	0.50
$d/l = 0$	0.0092	0.0197	0.0458	0.104	0.159	0.236
$h/l = 0$	0.0501	0.0815	0.128	0.18	0.204	0.22

Для одного частного случая при $q_s = 0.1$, $l = 12$ м и $h = 0.98$ м координаты свободной поверхности получаются следующие:

$x = 0$	0.06	0.15	0.30	0.52	0.82	1.19	1.84	2.413	3.46	6.0 м
$-y = 0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.98 м

Этому случаю отвечает $d = 0.24$ м $= d_{кр}$ («критический» размер, при котором левая и правая ветви свободной поверхности касаются друг друга в верхней точке дрены). При $d < d_{кр}$ свободная поверхность будет иметь вид, показанный на фиг., *B*.

Представляет большой интерес решение разобранной задачи, но при близком залегании водоупора к поверхности земли.

Московский гидромелиоративный институт.
Москва.

Поступило
17 X 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. V. Vedernikov, Comptes Rendus, **202**, № 14 (1936) et **202**, № 16 (1936) (Errata). [2] В. В. Ведерников, ДАН, III (XII), № 4 (99) (1936).

* Из формулы (6), а также и из элементарных соображений вытекает, что возможная интенсивность отвода $q_s < \frac{H}{h}$ или $q_s < 1 - \frac{h_p + h_v}{h}$. Или, при заданной величине q_s, высота h в середине поля должна быть больше некоторого минимума, т. е.

$$h > \frac{h_v + h_p}{1 - q_s},$$

где $h_p = \frac{p_d'}{\gamma}$.