Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

В. ШМУЛЬЯН

О РАЗЛИЧНЫХ ТОПОЛОГИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 III 1939)

I. Пусть $\mathfrak{S}$ означает линейное топологическое пространство (1). Множество $S \subset \mathfrak{S}$ назовем компактным по Moor'y (2), если для каждой направленной (3) последовательности $\{x_\alpha\} \subset S$ можно найти такой элемент $y \in \mathfrak{S}$, что для любой его окрестности U и для любого индекса α найдется такой индекс $\beta > \alpha$, что $x_\beta \in U$. Тогда легко доказать следующее утверждение:

Теорема 1. *Замкнутое множество $S \subset \mathfrak{S}$ бикомпактно тогда и только тогда, когда оно компактно по Moor'y.*

Обозначим через $a_1 \cdot S_1 + \ldots + a_n \cdot S_n$ совокупность элементов вида $a_1 \cdot x_1 + \ldots. + a_n \cdot x_n$, где $x_1 \in S_1, \ldots, x_n \in S_n$ ($a_1, \ldots, a_n$ — произвольные фиксированные числа, а $S_1, \ldots, S_n$ — произвольные фиксированные множества).

Теорема 2 (4). *Если множества $S_1, \ldots, S_n$ бикомпактны и если $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные фиксированные числа, то: 1) совокупность $S = a_1 \cdot S_1 + \ldots + a_n \cdot S_n$ бикомпактна и 2) совокупность элементов вида*

$$t_1 \cdot x_1 + \ldots + t_n \cdot x_n, \text{ где } x_1 \in S_1, \ldots, x_n \in S_n, \quad t_1 \geqslant 0, \ldots, t_n \geqslant 0, \quad \sum_1^n t_i = 1,$$

бикомпактна.

Следствие. *Если $S_1, \ldots, S_n$ — выпуклые бикомпактные множества, то и наименьшее содержащее их выпуклое множество тоже бикомпактно.*

II. Пусть тут и в дальнейшем E означает пространство типа $|B|$. Сопряженное пространство обозначим через $\bar{E}$.

Для любого кардинального числа ϑ и любого множества $\mathfrak{M}$ мощности $\leqslant \vartheta$ из единичной сферы пространства $\bar{E}$ (E) обозначим через $U_{x;\vartheta}(\mathfrak{M}; \varepsilon)$ $(U_{f;\vartheta}(\mathfrak{M}; \varepsilon))$ совокупность всех тех точек x (f) пространства E $(\bar{E})$, для которых при всех $f \in \mathfrak{M}$ $(x \in \mathfrak{M})$ выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Систему всех множеств $U_{x;\vartheta}(\mathfrak{M}; \varepsilon)$ $(U_{f;\vartheta}(\mathfrak{M}; \varepsilon))$, где ϑ — любое конечное кардинальное число, мы примем за совокупность окрестностей точки θ. Тогда множество E $(\bar{E})$ превращается в линейное топологическое пространство, которое мы обозначим через

$$E_T \; (\overline{(E_T)}).$$

Так как регулярность пространства E означает, что множество элементов $x \in E$, с $\|x\| \leqslant 1$, бикомпактно в пространстве E_T (5), то из теоремы 1 вытекает:

Теорема 3. *Пространство E регулярно тогда и только тогда, когда его сфера $\|x\| \leqslant 1$ компактна по Moor'у в E_T.*

Достаточность этого условия была недавно доказана Taylor'ом (6).

Недавно L. Alaoglu доказал (7), что всякое ограниченное по норме множество $S \subset \bar{E}$ является бикомпактным в $(\overline{E_T})$, если оно замкнуто в этой топологии.

Таким образом из теоремы 1 благодаря предложению Alaoglu очевидно имеем:

Теорема 4. *Единичная сфера пространства $\bar{E}$ компактна по Moor'у в $(\overline{E_T})$.*

Множество $K \subset \bar{E}$ называется регулярно замкнутым, если для любого элемента $f_0 \in \bar{K}$ найдется такой элемент $x_0 \in E$, что

$$\sup_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0).$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая, еще не опубликованная теорема М. Г. Крейна и автора:

Если множество $S \subset \bar{E}$ ограничено по норме, то наименьшее выпуклое регулярно замкнутое множество, содержащее S, совпадает с совокупностью всех элементов $\bar{E}$ вида

$$\int_S f(x)\, d\Phi(e),$$

где $\Phi(e)$ — неотрицательная аддитивная функция от множеств $e \subset S$ и $\operatorname{var}_S [\Phi(e)] = 1$.

Отсюда благодаря предложению Alaoglu легко вытекает следующее предложение В. Гантмахер:

Класс выпуклых ограниченных регулярно замкнутых множеств $S \subset \bar{E}$ совпадает с классом выпуклых бикомпактных множеств в $(\overline{E_T})$.

Таким образом благодаря теореме 2 мы приходим к следующей (тоже еще не опубликованной) теореме М. Г. Крейна и автора:

Теорема 5. *Пусть $S_1, \ldots, S_n$—произвольные ограниченные выпуклые регулярно замкнутые множества в $\bar{E}$ и пусть $a_1, \ldots, a_n$—n произвольных чисел. Тогда:*

1) *Множество $S = a_1 \cdot S_1 + \ldots + a_n \cdot S_n$ выпукло и регулярно замкнуто и*

2) *Наименьшее выпуклое множество, содержащее все S_i, тоже регулярно замкнуто.*

Если $\underline{\lim} f_n(x) \leqslant f_0(x) \leqslant \overline{\lim} f_n(x)$ для всех $x \in E$, то говорим, что f_0 является счетным пределом для $\{f_n\}$.

Ограниченное выпуклое множество K назовем счетно-замкнутым, если для каждой счетной последовательности $\{f_n\} \subset K$ найдется такой $f_0 \in K$, который является счетным пределом для $\{f_n\}$.

Теорема 6 (8). *Если ограниченное выпуклое $K \subset \bar{E}$ является счетно-замкнутым, то выполняется следующее:*

Если $\{x_n\}$ — счетная последовательность элементов пространства E и если элемент f_0 принадлежит наименьшему регулярно замкнутому множеству, содержащему K, то найдется такой элемент $f_1 \in K$, что

$$f_0(x_n) = f_1(x_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если это условие выполняется, то каковы бы ни были счетные последовательности $\{f_n\} \in K$ и $\{x_n\} \in E$, всегда найдется такой элемент $f_0 \in K$, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x_p) \leqslant f_0(x_p) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x_p) \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 7. *Если ограниченное выпуклое множество пространства $\overline{E}$ является компактным в себе подмножеством линейного топологического пространства $\overline{(E_T)}$, то оно счетно-замкнуто. Наоборот, если K содержит в себе все счетные пределы всех счетных последовательностей $\{f_n\} \in K$, то K является компактным в себе подмножеством линейного топологического пространства $\overline{(E_T)}$.*

Пусть теперь K является ограниченным, выпуклым и замкнутым множеством в $\overline{E}$ и пусть $f_0 \in K$. Проведем из точки f_0 лучи по всем направлениям. На каждом таком луче отметим последнюю точку, принадлежащую K. Совокупность всех таким образом отмеченных точек (кроме самой точки f_0, если она оказалась среди отмеченных) мы назовем квази-границей множества K (относительно точки f_0). Обозначим через $K(\Gamma)$ произвольное выпуклое множество, лежащее на квази-границе K (относительно f_0). Соединим теперь отрезками точки множества $K(\Gamma)$ с точкой f_0. Полученное таким образом множество обозначим через $K(\Gamma; f_0)$ и назовем сектором множества K относительно f_0.

Наименьшее регулярно замкнутое множество, содержащее данное множество S, назовем регулярной оболочкой S.

Теорема 8. *Пусть K выпуклое, ограниченное, счетно-замкнутое множество пространства $\overline{E}$ и пусть $f_0 \in K$. Тогда*:

1) *Каждый элемент f, принадлежащий квази-границе (относительно f_0) регулярной оболочки множества K, содержится в регулярной оболочке некоторого выпуклого множества $K(\Gamma)$, лежащего на квази-границе K (относительно f_0).*

2) *Регулярная оболочка множества K состоит из соединения регулярных оболочек всех секторов множества K относительно f_0.*

3) *Множество K регулярно замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит регулярные оболочки всех своих секторов относительно f_0.*

Если мы воспользуемся одной теоремой E. Helly [9], то легко получим теорему:

Теорема 9. *Единичная сфера пространства E, как часть пространства $\overline{\overline{E}}$, образует множество плотное, по топологии $\overline{((\overline{E})_T)}$, во всей единичной сфере пространства $\overline{\overline{E}}$. Следовательно наименьшее регулярно замкнутое множество в $\overline{(\overline{E})}$, содержащее сферу $\|x\| \leqslant 1$, совпадает со всей единичной сферой пространства $\overline{\overline{E}}$**.

III. Пусть теперь ϑ означает произвольное фиксированное бесконечное кардинальное число. Систему всех множеств $U_{x;\vartheta}(\mathfrak{M}; \varepsilon)$ $(U_{f;\vartheta}(\mathfrak{M}; \varepsilon))$ мы примем за совокупность окрестностей точки θ. Тогда множество E $(\overline{E})$ превращается в линейное топологическое пространство, которое мы обозначим через $E_T(\vartheta)$ $(\overline{(E_T)}(\vartheta))$**.

Теорема 10. *Если направленная последовательность $\{f_\alpha\} \subset \overline{E}$ стремится к элементу $f_0 \in \overline{E}$ в топологии $\overline{(E_T^*)}(\vartheta)$, причем мощность множества индексов α не больше ϑ, то $\lim\limits_{\alpha} \|f_\alpha - f_0\| = 0$.*

---

* Это же предложение в несколько иной формулировке было недавно получено H. Goldstine'ом [10].

** Идея рассмотрения такой топологии принадлежит А. И. Плеснеру.

Теорема 10'. *Если направленная последовательность* $\{x_\alpha\} \subset E$ *стремится к элементу* $x_0 \in E$ *в топологии* $E_T(\vartheta)$, *мощность множества индексов* α *не больше* ϑ, *то* $\lim\limits_{\alpha} \| x_\alpha - x_0 \| = 0$.

Если единичная сфера пространства E слабо компактна, то мы можем следующим образом дополнить теорему 9:

Теорема 11. *Если сфера* $\| x \| \leqslant 1$ *слабо компактна в* E, *то она, как часть пространства* $\overline{\overline{E}}$, *образует множество плотное по топологии* $\overline{((\overline{E})_T)}\,(\vartheta_0)$* *во всей единичной сфере пространства* $\overline{\overline{E}}$. *Отсюда легко получить, что каждый элемент* $F \in \overline{\overline{E}}$ *с* $\| F \| = 1$ *имеет в этом случае такой вид:*

$$F(f) = \lim_{\alpha} f(x_\alpha), \qquad (f \in \overline{E}),$$

где все $\{x_\alpha\}$ *принадлежат некоторому выпуклому множеству, лежащему на поверхности сферы* $\| x \| = 1$([11]).

Государственный университет.
Одесса.

Поступило
11 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Kolmogoroff, Studia Math., **5**, 29 (1934). [2] Ср. с E. Taylor, Bull. Amer. Math. Soc., **44**, № 11 (1938). [3] G. Birkhoff, Annals of Math., **38**, № 1 (1937). [4] Ср. с A. Markoff, Annals of Math., **36**, p. 464 (1935). [5] Bourbaki, C. R. Acad. Sci., Paris, **206**, 1701; см. также В. Шмульян, ДАН, XXII, № 8 (1939). [6] E. Taylor, Bull. Amer. Math. Soc., **44**, № 11 (1938). [7] L. Alaoglu, Bull. Amer. Math. Soc., **44**, № 3 (1938); см. также N. Bourbaki, C. R. Acad. Sci., Paris, **206**, 1701. [8] Ср. с В. Шмульян, ДАН, XVIII, № 7 (1938). [9] E. Helly, Monatshefte für Math. und Physik, XXXI (1921). [10] H. H. Goldstine, Duke Math., **4**, № 1 (1938). [11] Ср. с В. Шмульян, ДАН, XXII, № 8 (1939).

---

* ϑ_0 обозначает мощность счетной последовательности.