Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. И. ПЛЕСНЕР

ФУНКЦИИ МАКСИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 III 1939)

A-мера и A-интеграл. Пусть $E(\Delta)$ — спектральная функция максимального эрмитового оператора A *. Положим

$$\Gamma=\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_k;\qquad \Delta_i\Delta_k=0,\qquad E(\Gamma)=\sum_{k=1}^{\infty}E(\Delta_k)$$

(сильная сходимость), и для любого множества M вещ. оси, $\bar{\mu}(M;h)=\inf_{\Gamma\supset M}(E(\Gamma)h,h)$. Имеем $\bar{\mu}(M;h)=(\bar{E}(M)h,h)\leqslant(h,h)$. Наряду с внешней мерой $\bar{E}(M)$ введем внутреннюю меру $\underline{E}(M)=E-\bar{E}(I-M)$, где $I=(-\infty,\infty)$. Условие $\underline{E}(M)=\bar{E}(M)=E(M)$ выделяет борелевскую систему A-измеримых множеств, содержащую интервалы и следовательно все борелевы множества. $E(M)$ — A-мера M — является абсолютно аддитивной функцией множества в смысле сильной сходимости:

$$E(M)=E(M_1)+E(M_2)+\ldots,$$

если $M=\sum_{k=1}^{\infty}M_k$ и $M_iM_k=0$. Вещественная функция $F(\sigma)$ называется A-измеримой, если множества $M(F(\sigma)>\alpha)$ A-измеримы. Для таких функций можно образовать суммы Lebesgue'a $\sum_k l_k E(M_k)$, где $M_k=M(l_{k-1}\leqslant F(\sigma)<l_k)$ и $l_k-l_{k-1}<\delta$. Для ограниченных $F(\sigma)$ эти суммы при $\delta\to 0$ сходятся сильно, их предел — A-интеграл — обозначим через:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)\,dE(\Delta_\xi)=\lim_{\delta\to 0}\sum_k l_kE(M_k). \tag{1}$$

В случае неограниченного $F(\sigma)$ предполагаем, что $F(\sigma)$ определено и конечно за исключением точек множества A-меры нуль, и рассматриваем только те элементы f из H, для которых интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\xi)|^2\,d(E(\Delta_\xi)f,f)<\infty, \tag{2}$$

* Определение понятий и обозначений см. ([1]).

т. е. конечен. Для таких f сильный предел лебеговых сумм (1) существует, и мы обозначим его тем же символом интеграла, считая областью определения оператора, заданного этим интегралом, совокупность тех f, для которых выполнено условие (2). A-измеримость и A-интеграл легко обобщаются на комплексные функции разбиением на вещественную и мнимую часть.

Функции от A в широком смысле. Функции $F(\sigma)$, рассматриваемые до сих пор, будем называть функциями широкого класса. Положим для них

$$F(A)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, dE(\Delta_\xi)$$

и назовем оператор $F(A)$ функцией A в широком смысле. Соответствие $F(\sigma)\sim F(A)$ будет линейным, если сумму $F_1(A)+F_2(A)$ определить через $F_1(A)+F_2(A)\sim F_1(\sigma)+F_2(\sigma)$. Для элементов f, принадлежащих области определения $F_1(A)$ и $F_2(A)$, имеем $(F_1(A)+F_2(A))f=F_1(A)f+ +F_2(A)f$.

Теорема I. *Если $G(A)F(A)f$ имеет смысл, то*

$$(G(A)F(A)f, f)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, G(\xi)\, d(E(\Delta_\xi)f, f)-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, G(\eta)\, d_\xi d_\eta (D(\delta_\xi, \Delta_\eta) f, f),$$

где $D(\delta, \Delta)$ — отклонение A ([1]).

В общем случае нельзя $G(A)F(A)$ рассматривать как функцию от A и $F(A)G(A)\neq G(A)F(A)$; для коммутатора

$$[F(A), G(A)]=G(A)F(A)-F(A)G(A)$$

получаем представление

$$([F(A), G(A)]f, f)=\int_{-\infty}^{\infty}(G(\xi)F(\eta)-F(\xi)G(\eta))\, d_\xi d_\eta (D(\delta_\xi, \Delta_\eta)f, f).$$

Функции от A в узком смысле. Рассмотрим в λ-полуплоскости класс Ω регулярно-аналитических функций $F(\lambda)$, удовлетворяющих условиям ($\lambda=\sigma+i\tau$, $\tau\neq 0$):

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\lg}|F(\lambda)|}{1+\sigma^2}\, d\sigma = O(1) \quad \tau\to 0.$

2) Неопределенный интеграл $\displaystyle\int_{\Delta} \overset{+}{\lg}|F(\lambda)|\, d\sigma$ является равномерно абсолютно непрерывной функцией интервала при $\tau\to 0$ в любом конечном интервале (a, b) $(\Delta\subset(a, b))$.

3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^{\pi} \overset{+}{\lg}|F(\varepsilon\rho i+Re^{\varepsilon i\varphi})|\sin\varphi\, d\varphi=0$

$$\rho>0, \quad \varepsilon=\operatorname{sgn}(Im\lambda).$$

Теорема II. *Класс Ω образует кольцо функций $F(\lambda)$, допускающих параметрическое представление*:

$$F(\lambda) = e^{\varepsilon i t \lambda} B(\lambda)\, e^{(u_0+u)+i(v_0+v)},$$

где $t \geqslant 0$, $B(\lambda) = \prod\limits_k \dfrac{\lambda - a_k}{\lambda - \bar{a}_k}$ (a_k — нули $F(\lambda)$) *и*

$$u = \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau \lg p(\xi)}{(\sigma - \xi)^2 + \tau^2}; \quad u_0 = -\frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau\, dq(\Delta_\xi)}{(\sigma - \xi)^2 + \tau^2},$$

где $p(\xi) \geqslant 0$, $q(\Delta)$ *аддитивная неотрицательная и сингулярная функция интервала с производной, почти всюду равной нулю, и*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg p(\xi)|\, d\xi}{1+\xi^2} < \infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dq(\Delta_\xi)}{1+\xi^2}\, d\xi < \infty,$$

а v и v_0 — гармонические функции, сопряженные к u и u_0. $F(\lambda)$ принимает при $\tau \to 0$ (или по всем некасательным путям) почти всюду конечные значения, образующие граничную функцию $F(\sigma) = \lim\limits_{\tau \to 0} F(\lambda)$. *Имеем* $|F(\sigma)| = p(\sigma)$.

Теорема III. *Класс Ω содержит все ограниченные аналитические функции в λ-полуплоскости и те, для которых ограничены интегралы*:

$$\text{(a)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|\, d\sigma < \varkappa; \qquad \text{(b)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\, d\sigma < \varkappa$$

(*можно впрочем вместо* 1 *или* 2 *рассматривать любой показатель* p). *В этих трех случаях граничная функция $F(\sigma)$ соответственно ограничена или интегрируема* [*условие* (a)] *или квадрат ее* $|F(\sigma)|^2$ *интегрируем* [(b)] *в интервале* $(-\infty, \infty)$. *Обратно, если для функций $F(\lambda)$ из Ω граничная функция $F(\sigma)$ в $(-\infty, \infty)$* 1) *ограничена*, 2) *интегрируема*, 3) *квадрат ее интегрируем, то $F(\lambda)$ соответственно*: 1) *ограничена*, 2) *интеграл* (a) *ограничен*, 3) *интеграл* (b) *ограничен*.

Функцию $F(\sigma)$ широкого класса будем считать в то же время принадлежащей к узкому классу, если она почти всюду совпадает с граничной функцией некоторой функции $F(\lambda)$ из Ω. Сопряженным классом назовем совокупность всех $\overline{F(\sigma)}$, где $F(\sigma)$ принадлежит к узкому классу. Узкий класс функций образует кольцо, то же самое имеет место и для сопряженного класса. Операторы $F(A)$ и $\overline{F}(A)$ будем соответственно называть функцией A в узком смысле и сопряженной функцией от A, если $F(\sigma)$ принадлежит к узкому классу. Имеем

$$F_2(A) F_1(A) f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(\xi) F_2(\xi)\, dE(\Delta_\xi) f,$$

если $F_1(A)$—функция A в узком смысле или $F_2(A)$—сопряженная функция от A.

Теорема IV. *Для функций A в узком смысле имеет место мультипликативность соответствия $F_1(\sigma) F_2(\sigma) \sim F_2(A) F_1(A)$ в том смысле, что если положить $F(\sigma) = F_1(\sigma) F_2(\sigma)$, имеем $F(A) f = F_2(A) F_1(A) f$ для тех f, для которых правая сторона имеет смысл. Естественно по-*

этому здесь определить $F_2(A)F_1(A)=F_1(A)F_2(A)=F(A)$. При таком определении умножения функции $F(A)$ в узком смысле образуют абелево кольцо операторов.

Теорема IV′. *Сопряженные функции от A обладают аналогичными свойствами, указанными в теореме IV для функции в узком смысле.*

Теорема V. *Линейная система операторов — функций от A в широком смысле обладает свойством, что умножение элемента этой совокупности справа на функцию A узкого класса и слева на сопряженную функцию от A дает элемент той же совокупности, причем если $G(\sigma)=F_2(\sigma)F(\sigma)F_1(\sigma)$, где $F_1(\sigma)$—функция узкого класса, $F_2(\sigma)$ — сопряженная функция, то имеем $G(A)f=F_2(A)F(A)F_1(A)f$ для всех f, для которых правая часть имеет смысл. Поэтому и здесь естественно определить $F_2(A)F(A)F_1(A)=G(A)$.*

Коммутатор $[F(A), G(A)]$ вычисляется формулой

$$([F(A), G(A)]f, f)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)F(\eta)\, d_\xi d_\eta (D(\delta_\xi, \Delta_\eta)f, f),$$

если $F(A)$ есть функция A в узком смысле или $G(A)$—сопряженная функция от A.

Теорема VI. *Если $F(\sigma)$ принадлежит к узкому соответственно сопряженному классу и обращается в 0 только на множестве A-меры нуль (это условие отпадает, если в каноническом разложении A гипермаксимальная часть A_0 отсутствует), то оператор $F(A)$ имеет левый, соответственно правый, обратный оператор, определенный выражением $F^{-1}(A)$ $\left(F^{-1}(\sigma)=\frac{1}{F(\sigma)}\right)$.*

Теорема VI применима к решению функциональных уравнений вида $F(A)f=g$, где $F(A)$ — функция A в узком смысле или сопряженная функция.

На основе полученных здесь результатов можно включить операторное исчисление Heaviside'а в общую теорию спектрального анализа и указать широкие границы его применимости.

Математический институт
Академии Наук СССР.
Москва.

Поступило
20 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Плеснер, Спектральный анализ максимальных операторов, ДАН, XXII, № 5 (1939).