УДК 534.1:536.2.01

БОЛЬШИЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕПЛОВОГО РЕЗОНАТОРА

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ⁺, И. А. КОНЦЕВОЙ

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого, пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель, Беларусь, e-mail: shabl@gstu.gomel.by

Изучаются собственные колебания большой амплитуды в тепловых резонаторах трех типов: открытом, полуоткрытом и закрытом. Задача решена на основе прямого численного моделирования. Расчеты проведены для высокотемпературной сверхпроводящей керамики на основе иттрия в двух температурных областях с сильно выраженными нелинейностями теплофизических свойств материала. Обнаружено неклассическое поведение градиента температуры. Установлены качественные и количественные закономерности эволюции процесса во времени.

Введение

Проблемы термической генерации нелинейных колебаний в материалах представляют значительный интерес для физики волн и ее приложений. В настоящее время накоплен большой опыт исследований акустических резонаторов, см. [1] и приведенную там библиографию. Сравнительно недавно появились публикации о сверхпроводниковых резонаторах в электромагнитном поле с учетом тепловой нелинейности, которой обладают высокотемпературные сверхпроводящие материалы [2]. В условиях хорошо выраженной тепловой неравновесности некоторые сверхпроводники могут служить основой теплового резонатора [3]. Для таких устройств важное значение имеет задача о неустановившихся нелинейных колебаниях температуры.

В данной работе изучается тепловой резонатор, материалом которого служит высокотемпературная сверхпроводящая керамика на основе иттрия. Локальная неравновесность теплового поля – главная отличительная черта рассматриваемых процессов. Цель состоит в том, чтобы исследовать: 1) собственные колебания большой амплитуды в резонаторах трех типов – закрытом, полуоткрытом и открытом; 2) свойства этих колебаний в зависимости от сильных нелинейностей теплофизических свойств керамики.

Постановка и решение задачи

Релаксационная модель Максвелла переноса тепла в неподвижной среде состоит из уравнения для теплового потока и уравнения баланса энергии:

$$\frac{q}{\gamma} + \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad (2)$$

$$u = \int_{0}^{T} c(T) dT , V = \int_{0}^{T} \frac{\lambda(T)}{\gamma(T)} dT = \int_{0}^{u} w^{2}(u) du ; w^{2} = \frac{\lambda}{c\gamma},$$

где x – декартова координата; t – время; T – температура; q – удельный тепловой поток; λ – коэффициент теплопроводности; c – объемная теплоемкость; γ – время релаксации теплового потока; w – скорость распространения тепловых возмущений. Искомые функции: $T(x, t), q(x, t), x \in [0, h], t \ge 0; h$ – толщина слоя материала. Современные методы исследования локально-неравновесной модели теплопереноса (1), (2) представлены в [3]; там же проведен подробный анализ возникновения градиентной катастрофы и свойств ударных тепловых волн. В соответствии с этими результатами присоединяем к левой части уравнения (1) слагаемое

$$\Psi \frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial q}{\partial x} \right),$$

где ρ – плотность, Ψ – коэффициент искусственной диссипации. Этот коэффициент является аналогом газодинамического коэффициента искусственной вязкости и применяется для того, чтобы при численном решении сглаживать сильные разрывы, которые могут появляться в ходе эволюции теплового поля.

⁺ Автор, с которым следует вести переписку.

Собственные колебания большой амплитуды изучаем для трех основных типов резонаторов.

Закрытый резонатор:

$$q(x = 0, t) = q_0, q(x = h, t) = q_w;$$
(3)

допускается вариант, когда $q_0 = q_w = 0$.

Полуоткрытый резонатор:

$$q(x = 0, t) = 0, T(x = h, t) = T_w.$$
(4)

Открытый резонатор:

$$T(x = 0, t) = T_0, \ T(x = h, t) = T_w;$$
(5)

допускается вариант, когда $T_0 = T_w$. Здесь q_0, q_w , T_0, T_w – постоянные величины. Для всех трех вариантов (3)–(5) начальные условия берем в виде:

$$T(x, t=0) = T^{0}(x), q(x, t=0) = 0, x \in [0, h].$$
(6)

Экспериментальное исследование теплофизических свойств высокотемпературной сверхпроводящей керамики $Y_{0.8} - Sm_{0.2} - Ba_2 - Cu_3 - O_{7-x}$ выполнено в [4]. Воспользуемся этими результатами и построим аппроксимирующие зависимости $\lambda(T)$, c(T) для двух температурных областей.

Низкие температуры:

T, $K \in [7, 13]$, y = 600 c;

 $\lambda(T) = 1,19\exp(0,023T) - 40\exp(-0,54T)$, Вт/(м-град);

 $c(T) = 4985 \exp(0,112T)$, Дж/(м³-град).

Здесь функции $\lambda(T)$ и c(T) – монотонно возрастающие, причем $\lambda \in [0,485; 1,569]; c \in [10918; 21380].$ Существенно, что температуропроводность $a = \lambda(T)/c(T)$ имеет максимум при T = 9,78 К.

Высокие температуры:

T, $K \in [145; 300]$, y = 500 c;

 $\lambda(T) = 6,728 \exp((0,00105T) - 1,3205 \exp((0,00475T)))$

Вт/(м.град);

 $c(T) = 1,44 \cdot 10^6 \exp(0,0019T), Дж/(м^3 \cdot град).$

Здесь $\lambda(T)$ – монотонно убывающая функция, причем $\lambda \in [3,729; 5,205]; c(T)$ – монотонно растет в интервале $[1,897\cdot10^6; 2,546\cdot10^6];$ температуропроводность a(T) – монотонно убывающая функция.

Время релаксации у было выбрано на основе данных [4, 5]. Температура сверхпроводящего перехода равна 97 К.

Далее работаем с безразмерными величинами. При обезразмеривании применяем масштабы величин (они отмечены нижним индексом b), которые обеспечивают инвариантность размерной и безразмерной форм записи уравнений и краевых условий: $\lambda_b = x_b^2 c_b / t_b$, $q_b = \lambda_b T_b / x_b$ и т. п. Решение краевых задач (1)-(6) выполняем численным методом интегральных соотношений А. А. Дородницына; применяем гиперболический вариант алгоритма построения расчетной схемы [6]. В *n*-ом приближении отрезок [0, *h*] делится на *n* полос: $x_i = ih/n$, i = 0, 1, ..., n. В данной задаче n = 6. Строим замкнутую систему интегральных соотношений и редуцируем их к аппроксимирующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Итоговая задача Коши решается методом Рунге-Кутта пятого порядка точности. В результате получаем температуру $T(x_i, t)$ и тепловой поток $q(x_i, t)$ на границах полос. Контроль точности расчетной схемы основан на использовании различных проверочных вариантов построения «кусочных» и «сквозных» аппроксимаций. Кроме того, выполнялось сравнение с точным решением нелинейных уравнений (1), (2). Проведенные тестовые расчеты подтвердили высокую точность вычислений.

Результаты и обсуждение

При обработке результатов применяем следующие критерии:

безразмерный тепловой поток
$$Q = \frac{hq(x,t)}{T_w^0 \lambda(T_w^0)};$$

безразмерный градиент температуры

$$g = \frac{h}{T_{\psi}^0} \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right);$$

параметр энергии $E = \frac{T c(T)}{\rho w^2(T)};$

параметр неравновесности
$$\Omega^{-2} = \frac{q^2}{u^2 w^2}$$

параметр нелинейности среды $D = \frac{T}{w^2} \frac{d(w^2)}{dT}$;

амплитуда температуры
$$A_T \equiv A_T(x_i, t) = \frac{T(x_i, t)}{T_w^0};$$

амплитуда теплового потока $A_q \equiv q(x_i, t);$

добротность
$$K = \frac{1}{h} \left(\frac{\lambda \gamma}{c} \right)^{1/2};$$

волновое сопротивление
$$Z = \frac{1}{h} (\lambda c \gamma)^{1/2} = \frac{w c \gamma}{h}$$

Здесь параметры *К* и *Z* являются тепловыми аналогами добротности и волнового сопротивления, применяемых для расчета электрических контуров и линий передач.

Масштабы величин для области низких температур: $T_b = 10$ K, $q_b = 1$ BT/M², $t_b = y = 600$ c, $x_b = h$; для области высоких температур: T = 225 K, $q_b = 10^3$ BT/M², $t_b = y = 500$ c, $x_b = h$.

Сделаем пояснения к содержанию таблиц 1-3. Сведения об амплитудах температуры и теплового потока даны в конце каждого из первых четырех полупериодов колебаний. Указаны алгебраические

<i>h</i> -10², м		x =	= 0		x = h/2				t^T/v	19/2
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$	$\binom{n_{\infty}}{(n_{\infty})}$	(n_{∞})
Низкие температуры: $T^{0}(x) = 10 - 2 \exp(-0.07x/h) \cos(\pi x/h)$ К, T^{0} , $K \in [8, 11, 865]$, $T = 10 - 2 \exp(-0.07x/h) \cos(\pi x/h)$								865], $T_* = 10$	0,08 K	
2	-2,077	1,687	-1,885	1,574	-10,678	10,258	-9,776	9,474	9,084 (105)	9,312 (107)
5	-2,079	1,610	-1,616	1,316	-10,380	9,338	-8,302	7,532	9,072 (43)	9,312 (43)
10	-2,086	1,446	-1,273	0,953	-9,887	7,896	-6,344	5,081	9,108 (22)	9,360 (22)
20	-2,082	1,172	-0,787	0,498	-8,959	5,704	-3,696	2,317	9,144 (12)	9,384 (12)
	É	Зысокие тем	пературы: 7	$x^{-0}(x) = 225 - $	75 cos $(\pi x/h$) K, T^0 , K \in	[150; 300], 1	T. = 227,92 I	K	
1	-78,093	64,134	-60,836	51,467	-13344,7	11858,1	-10561,4	9342,1	9,384 (40)	9,300 (41)
2	-77,934	57,443	-47,453	36,623	-12687,4	9953,2	-7930,8	6191,4	9,240 (21)	9,336 (21)
5	-77,729	40,750	-22,378	12,782	-10878,7	5985,4	-3289,0	1816,7	9,240 (9)	9,372 (9)
10	-77,992	21,051	-5,951	1,625	-8746,6	2500,8	-671,4	224,8	9,480 (5)	9,600 (5)

Таблица 1	. Свойства	амплитуд колебаний	в закрытом	резонаторе ($q_0 = 0, q$	7. = 0
-----------	------------	--------------------	------------	--------------	--------------	--------

Таблица 2. Свойства амплитуд колебаний в полуоткрытом резонаторе $q_0 = 0$, $T_w = \text{const}$

<i>h</i> -10 ² , м	x = 0				x = h				$T^* = 10,08 \text{ K},$	14 /2
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$	(n_{∞})	(n_{∞})
Низкие температуры: $T^{(0)}(x) = 10 - 3 \exp(-0.27x/h) \cos(0.5\pi x/h)$ К, $T^{(0)}, K \in [7, 10], T_{*} = 10$ К										
2	-3,000	2,058	-2,417	1,777	-13,245	12,120	-11,145	10,375	9,156	9,696
5	-3,000	1,825	-1,782	1,242	-12,434	10,054	-8,191	6,604	9,012 (23)	9,504 (23)
10	-3,000	1,489	-1,115	0,673	-11,217	7,376	-4,841	3,154	9,060 (12)	9,516 (12)
20	-3,000	0,971	-0,446	0,185	-9,326	3,935	-1,675	-0,305	9,192 (7)	9,672 (7)
	В	ысокие тем	пературы: Т	$x^{0}(x) = 225 - $	75 cos (0,5π	(x/h) K, T^0 , k	K ∈ [150; 22.	5], <i>T</i> . = 225	К	
1	-75,000	53,393	-45,765	33,908	-11912,6	9414,4	-7450,4	5888,3	9,096 (21)	9,444 (21)
2	-75,000	42,458	-28,013	16,830	-10773,6	6695,6	-4175,4	2599,9	9,120 (11)	9,480 (11)
5	-75,000	19,778	-5,738	1,620	-8314,8	2351,4	-667,8	190,6	9,384 (5)	9,744 (5)
10	-75,000	2,205	0,000	0,000	-5965,4	183,8	0,000	0,000	9,732 (2)	10,212 (2)

Таблица 3. Свойства амплитуд колебаний в открытом резонаторе $T_0 = \text{const}, T_w = \text{const}$

<i>h</i> -10 ² , м		<u>x</u> =	h/2		x = 0				tT /v	19/2
	$\Delta T^{(1)}$	$\Delta T^{(2)}$	$\Delta T^{(3)}$	$\Delta T^{(4)}$	$\Delta q^{(1)}$	$\Delta q^{(2)}$	$\Delta q^{(3)}$	$\Delta q^{(4)}$	(n_{∞})	(n_{∞})
Низкие температуры: $T^0(x) = 10 + 2,25 \sin(\pi x/h) \text{ K}, T^0, \text{ K} \in [10; 12,25], T_* = 10 \text{ K}$										
2	2,250	-3,034	2,098	-2,603	-14,338	14,587	-13,104	12,729	8,592 (97)	8,160 (92)
5	2,250	-2,747	1,862	-2,036	-14,040	13,146	-11,150	9,969	9,024 (42)	8,844 (40)
10	2,250	-2,364	1,502	-1,383	-13,268	10,962	-8,356	6,733	8,964 (21)	7,800 (22)
20	2,250	-1,793	0,973	-0,666	-12,031	7,861	-4,773	3,087	8,928 (11)	9,504 (12)
		Высокие те	мпературы:	$T^{0}(x) = 225$	+ 75 sin (πx	(h) K, T^0 , K	€ [225; 300]	, <i>T</i> . = 225 K		
1	75,000	-75,600	59,947	-58,500	-14489,7	13193,1	-11272,6	10344,9	8,904 (41)	8,028 (35)
2	75,000	-66,713	47,723	-40,509	-13756,8	11083,7	-8410,5	6899,1	9,972 (21)	8,220 (19)
5	75,000	-45,788	23,445	-13,390	-11791,0	6597,6	-3463,9	2016,3	9,276 (9)	10,152 (9)
10	75,000	-23,040	6,028	-1,971	-9461,1	2728,6	-698,7	253,9	9,372 (5)	9,624 (5)

величины $\Delta T^{(1)}$, ..., $\Delta T^{(4)}$ и $\Delta q^{(1)}$, $\Delta q^{(4)}$ отклонений температуры (в кельвинах) и теплового потока (в Вт/м²) от их асимптотических (при $t \to \infty$) значений на соответствующей полосе, рис. 1; на рис. 2 показаны типичные начальные профили $T^0(x)$. Величина температуры, по отношению к которой вычисляются ΔT , обозначается T_* ; во всех вариантах $q_* = 0$. Считаем, что процесс затухания колебаний закончен, если на каждой полосе выполнены неравенства $|\Delta T| \leq 10^{-2} |\Delta T|_{max}$, $|\Delta q| \leq 10^{-2}$ $|\Delta q|_{max}$, где индекс тах относится к наибольшему по модулю достигаемому в задаче значению.



Рис. 1. Собственные колебания: отсчет отклонений температуры от ее равновесного значения

Длительность полного затухания обозначаем t_{∞}^{T} , t_{∞}^{q} ; рядом с этими значениями в скобках указываем соответствующее число n_{∞} полупериодов колебаний. Видно, что зависимость n_{∞} от толщины h монотонно убывающая и близка к линейной. Это означает, что в тонком и толстом образцах имеем, соответственно, высокочастотный и низкочастотный процессы для наблюдения неравновесных структур, возбуждаемых неоднородным распределением температуры $T^{0}(x)$. Кроме того, для тонких пластин выше интенсивность теплообмена: при убывании h растут модули тепловых потоков в сечениях $x = x_i$.

Практика наших расчетов показала важную роль первоначального направления градиента температуры [знака производной $dT^0(x)/dx$], влияющего на появление областей импульсного (ударного) нагрева и охлаждения. Столь же существен характер немонотонности функции $T^0(x)$ – наличие у нее максимума или минимума, см. рис. 2.

Пусть *l* и *L* есть, соответственно, точная нижняя и точная верхняя границы значений начальной температуры $T^{0}(x), x \in [0, h]$. Оказывается, что существуют такие параметры задачи, для которых в ходе волнового процесса возможна одна из ситуаций: 1) происходит всплеск нагрева, T/L > 1; температура импульсно повышается до значений, превышающих верхнюю границу L; 2) происходит всплеск охлаждения, T/L < 1; температура становится меньше нижней границы /. Например, согласно табл. 2, имеем в отдельные моменты времени при низких температурах: $T/L = 1,2, h = 2 \cdot 10^{-2}$ м; при высоких температурах: $T/L = 1,24, h = 1.10^{-2}$ м. Табл. 3: низкие температуры, $T/\partial = 0.7$, $h = 2.10^{-2}$ м. Перечисленные результаты справедливы для всех трех типов резонаторов.

Взаимодействие тепловых волн с границами образца обусловливает главные различия между резонаторами. Табл. 1–3 демонстрируют:

 различные характеры пространственной неоднородности тепловых полей (см., например, поведение тепловых потоков на левой, на правой границах образца и в его средней точке);

2) хорошо выраженные всплески температуры (теплового потока) на той границе, где зафиксирован, соответственно, тепловой поток (температура).

Вместе с тем для одного и того же типа резонатора наблюдаются одинаковые качественные свойства амплитуд колебаний в низкотемпературном и высокотемпературном интервалах. В количественном отношении в каждом из этих интервалов функции $\lambda(T)$, c(T) существенным образом воздействуют на размахи колебаний.

На рис. 3–5 показаны типичные формы колебаний на нескольких фазовых плоскостях; они несут дальнейшую информацию о тех вариантах, что даны в табл. 1–3 при $h = 5 \cdot 10^{-2}$ м. Стрелка указывает направление движения точки вдоль фазовой траектории с течением времени. При низких и при высоких температурах для всех трех типов резонаторов имеем следующие результаты. Связь параметра нелинейности Ω^{-2} с тепловым потоком Q имеет гистерезисный характер; в отдельных вариантах петля гистерезиса вырождается в однозначную линию $\Omega^{-2}(Q)$. Зависимость $\Omega^{-2}(D)$ – немонотонная, имеет максимум, и этот максимум



Рис. 2. Начальные температурные профили для резонаторов: а – закрытого; б – полуоткрытого; в – открытого



Рис. 3. Закрытый резонатор. Фазовые портреты колебаний при высоких температурах, $x = x_1 = h/6$

Рис. 4. Полуоткрытый резонатор. Фазовые портреты колебаний при низких температурах, $x = x_3 = h/2$

Рис. 5. Открытый резонатор. Фазовые портреты колебаний при высоких температурах, $x = x_1 = h/6$

смещается с течением времени, в зависимости от условий задачи, в сторону больших или меньших по модулю значений параметра нелинейности D. На плоскостях (g, Q), (Q, E), (A_T , A_q) имеем устойчивые фокусы. Волновое сопротивление $Z(A_T)$ – монотонно возрастающая функция амплитуды температуры. Известно, что в равновесных условиях (модель теплопроводности Фурье) векторы q и grad Tнаправлены противоположно друг другу: $q = -\lambda$ grad T. Это – классическая ситуация. В локальнонеравновесных условиях может возникнуть неклассический вариант [3]: q и grad T направлены одинаково. Для рассмотренных здесь задач обнаружено, что во внутренних точках при $t \ge 0$ происходит чередование классической и неклассической ситуаций. Например, на рис. 3–5 на фазовой плоскости (g, Q) имеем в l и III квадрантах Qg > 0, во II и IV Qg < 0.

Основные качественные различия между типами резонаторов относятся к поведению добротности К(А_T). Закрытый резонатор: при низких температурах у левой и правой границ образца $(x = x_1, x = x_5)$ эта функция имеет хорошо выраженный максимум, а в средней точке (x = h/2) эта зависимость близка к линейной и убывающая; при высоких температурах К(А_T) – монотонно убывающая функция. Полуоткрытый резонатор: во всех точках образца $K(A_T)$ при низких температурах монотонно возрастающая функция, а в области высоких температур монотонно убывает. Открытый резонатор: при низких температурах $K(A_T)$ имеет максимум, а при высоких температурах – монотонно убывающая функция. Перечисленные свойства добротности резонаторов обусловлены двумя факторами: условиями на границах и температуропроводностью a(T).

Выводы

1. Неоднородное по координате начальное тепловое поле $T^0(x)$ возбуждает нелинейные собственные колебания большой амплитуды. Их свойства обусловлены неравновесностью процесса и взаимодействием тепловых волн с границами образца.

2. Толщина образца – один из основных факторов влияния на процесс. Для тонкой и толстой пластин имеем, соответственно, высокую и низкую частоты колебаний.

3. Три типа резонаторов (закрытый, полуоткрытый, открытый) различаются между собой структурой температурной неоднородности и поведением добротности при низких и при высоких температурах. В каждом сечении образца наблюдается чередование во времени классической (*q*·grad *T* < 0) и неклассической (q-grad T > 0) ситуаций. Это обстоятельство важно при экспериментальном определении теплового потока.

Обозначения

T – температура, К; q – тепловой поток, Вт/м²; $c = \rho c_p$ – объемная теплоемкость, Дж/(м³·град); ρ – плотность, кг/м³; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·град); y – время релаксации теплового потока, с; t – время, с; x – декартова координата, м; w – скорость распространения тепловой волны, м/с; a – температуропроводность, м/с²; ψ – коэффициент искусственной диссипации, м⁴/с²; h – толщина образца, м; u – плотность энергии, Дж/м³.

Индексы: нижний нулевой индекс – значение функции на левой границе; w – значение функции на правой границе; верхний нулевой индекс – начальное (при t = 0) значение функции; b – масштаб (характерное значение) величины.

Литература

- 1. Руденко О. В., Хедберт К. М., Энфло Б. О. Нелинейные стоячие волны в слое, возбуждаемые периодическим движением его границы // Акустический журнал. – 2001 (47), № 4, 525–533
- 2. Жаров А. А., Нефслов И. М., Резник А. Н. Сверхпроводниковый резонатор в сильных СВЧ полях: тепловой домен, нелинейные тепловые эффекты // Журнал технической физики. – 1997 (67), № 10, 81–89
- Шабловский О. Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах. Гомель: ГГТУ имени П.О. Сухого. – 2003
- Бойко Б. Б., Акимов А. И., Васильев Л. Л., Гатальская
 В. И., Демьянов С. Е., Евсеева Л. Е., Стрибук Е. К., Танаева С. А. Теплофизические свойства высокотемпературных сверхпроводников Y_{0.8} - Sm_{0.2} - Ba₂ - Cu₃ - O_{7-x} в диапазоне температур 4.2-380 К // Инженерно-физический журнал. - 1990 (58), № 5, 709-714
- Voronel A. V., Linsky D., Kisliuk A., Drislikh S. Heat capacity and equilibration time near T_c of YBa₂Cu₃O₇ // Physica C. - 1988 (153-155), 1086-1088
- Коробейников В. П. Задачи теории точечного взрыва. М.: Наука. – 1985

Shablovskii O. N. and Kontsevoy I. A. Large natural oscillations of a thermal resonator.

Поступила в редакцию 24.04.2006.

© О. Н. Шабловский, И. А. Концевой, 2006.

Natural oscillations of large amplitudes are studied in heat resonators of three types: open-ends, closed-ends, and half-open ones. The problem is solved by means of straight numerical modelling. The calculations were conducted for high-temperature superconducting yttrium-based ceramics with two thermal regions of strongly nonlinear thermo-physical properties. A non-classic behaviour of the temperature gradient is found out. Qualitative and quantitative features of time evolution of the process are established.