Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 3

ФИЗИКА

В. ФАБРИКАНТ

ВОЗБУЖДЕНИЕ АТОМОВ В ГАЗОВОМ РАЗРЯДЕ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 10 III 1939)

В предыдущих сообщениях, посвященных возбуждению атомов в газовом разряде ([1], [2], [3]), мы принимали, что концентрация возбужденных атомов или фотонов на стенках разрядной трубки равна нулю. Такое предположение конечно ограничивало область применимости полученных результатов. Когда длина свободного пробега (атомов или фотонов) и радиус разрядной трубки — величины одного порядка, необходимо уже вводить более точные граничные условия. Последнее в особенности важно для обработки данных, полученных при помощи люминесцирующих зондов ([4]).

В настоящем сообщении используются уточненные граничные условия при решении диффузионных задач, связанных с возбуждением атомов в газовом разряде.

1. В. де-Гроот ([5]), рассматривая вопрос о граничных условиях для диффузионных задач при конечной длине свободного пробега, высказал в начале статьи в качественной форме соображения, позволяющие довольно точно сформулировать эти граничные условия. В. де-Гроот указывает, что поток частиц, проходящий через поверхность, находящуюся на расстоянии длины свободного пробега от стенки, должен быть равен числу частиц, ударяющихся о стенку.

Это соотношение по существу эквивалентно приравниванию нулю потока частиц, идущего от стенки в объем, чем часто пользуются при аналогичных оптических задачах [рассеяние света в мутных средах ([6])].

В. де-Гроот воспользовался указанными соображениями только для качественной оценки концентрации частиц на границах.

Покажем прежде всего, что при соответствующем уточнении эти соображения позволяют без труда получить основное соотношение, приводимое В. де-Гроотом в конце статьи и полученное им в результате довольно длинных и сложных выкладок с использованием интегрального уравнения.

В. де-Гроот рассматривает линейную задачу. Для удобства сравнения мы сохраним его обозначения. Дифференциальное уравнение задачи:

$$k\frac{d^2n}{dx^2}=-a, \tag{1}$$

где k — коэффициент диффузии, равный λv, λ — длина свободного пробега, v — скорость частиц, n — концентрация частиц, a — число частиц, образуемых в единицу времени на единицу длины. В. де-Гроот считает a не зависящим от x.

Если длина отрезка, в котором происходит диффузия, равна l, то решение уравнения (1) имеет следующий вид:

$$n=\frac{a}{2\lambda v}(l-x)\,x+b, \tag{2}$$

где b — константа, определяемая из граничных условий и равная концентрации частиц на границах.

Поток частиц, идущих благодаря диффузии к границе через поверхность, находящуюся на расстоянии длины свободного пробега от границы, равен $-k\frac{dn}{dx}$; число частиц, ударяющихся о границу, равно $\frac{nv}{2}-\frac{\lambda v}{2}\cdot\frac{dn}{dx}$. Согласно В. де-Грооту следовало бы просто приравнять эти обе величины, однако это не точно, надо еще учесть частицы, возникающие в пределах длины свободного пробега, из них половина пойдет к стенке — $\frac{a\lambda}{2}$.

Таким образом мы можем написать:

$$-k\frac{dn}{dx}+\frac{a\lambda}{2}=\frac{nv}{2}-\frac{\lambda v}{2}\,\frac{dn}{dx} \tag{3}$$

или

$$a\lambda=nv+\lambda v\,\frac{dn}{dx}. \tag{4}$$

При переходе от (3) к (4) мы пренебрегли изменением $\frac{dn}{dx}$ на протяжении длины свободного пробега. Эквивалентное пренебрежение делает В. де-Гроот при своем более сложном решении задачи.

Соотношение (4) и является искомым граничным условием. Подставив в (4) вместо n (2) и определив b, мы получим:

$$n=\frac{a}{2\lambda v}(l-x)\,x+\frac{l+2\lambda}{v}\,a. \tag{5}$$

Соотношение (5) совершенно тождественно с окончательным соотношением для n, полученным в работе В. де-Гроота.

Таким образом условие (3) эквивалентно в известных пределах более общему рассмотрению с помощью интегрального уравнения.

Естественно, что при очень больших длинах свободного пробега ($\lambda \geqslant l$) изложенный способ становится уже неточным.

2. Применим граничное условие, аналогичное (3), к интересующим нас задачам.

При этом мы будем пользоваться обозначениями, применявшимися в предыдущих сообщениях ([1–4]).

Так же, как и раньше, мы будем считать столб разряда бесконечным цилиндром. Тогда на стенках разрядной трубки аналогично (3) будет:

$$-\frac{1}{3}\lambda\bar{c}\,\frac{dn_a}{dr}+\frac{1}{3}\,\alpha_a n q_e\lambda=\frac{n_a\bar{c}}{4}-\frac{\lambda\bar{c}}{6}\,\frac{dn_a}{dr}, \tag{6}$$

где n_a — концентрация возбужденных атомов или фотонов, c — средняя скорость частиц, $\alpha_a n$—число возбуждающих соударений на оси разряда (n — концентрация нормальных атомов), q_e — распределение концентрации электронов по сечению разряда.

При написании (6) принимается, как обычно, что благодаря косым прохождениям частиц толщина слоя, проходимого в среднем без соударений, равна не длине свободного пробега, а двум третям этой величины ([7]); кроме того мы пренебрегли более высокими степенями длины свободного пробега.

3. Посмотрим прежде всего, при каких условиях можно пренебречь вторым членом в левой части уравнения (6).

Отношение этого члена к первому члену правой части уравнения (6) равно:

$$\delta = \frac{1}{12} \frac{\lambda}{\bar{c}} \frac{\alpha_a n q_e}{n_a}. \tag{7}$$

Для приближенной оценки δ можно принять, что

$$n_a(a) \approx n_a(0)\, q_e(a). \tag{8}$$

В случае слабого тушения концентрация возбужденных атомов на оси разряда $n_a(0)$ равна числу возбуждающих соударений $(\alpha_a n)$, умноженному на диффузионную продолжительность жизни ([3]) $\left(\tau_a = \frac{a^2}{D_a \mu^2},\right.$ где a — радиус разрядной трубки, D_a — коэффициент диффузии, равный $\left.\frac{1}{3}\lambda\bar{c}\right)$. Подставив в (7) вместо n_a его выражение, получим:

$$\delta \approx \frac{\mu^2}{4} \frac{\lambda^2}{a^2}. \tag{9}$$

Параметр μ равен 2.4 при концентрации электронов на стенке, равной нулю, и тем меньше, чем больше концентрация на стенке, но изменяется при этом в довольно небольших пределах.

Соотношение (9) показывает, что δ можно считать малой величиной. Как было показано в одном из предыдущих сообщений ([2,3]), аналогия между диффузией квантов и атомов должна наблюдаться только при больших оптических плотностях. Нетрудно показать, что для фотонов δ можно считать равным нулю при оптической плотности $(\overline{k}a)$, значительно превышающей $\frac{\mu^2}{2}$.

4. Остановимся теперь несколько на функции q_e, входящей и в граничное условие (6), и в дифференциальное уравнение, которое мы будем решать ниже [уравнение (11)].

Как уже указывалось ([1]), согласно теории Шоттки

$$q_e = J_0\left(\mu_1 \frac{r}{a}\right), \tag{10}$$

где J_0 — функция Бесселя, μ_1 — первый корень функции Бесселя.

В настоящей работе мы уже должны заменить μ_1 параметром μ, меньшим, чем μ_1, поскольку концентрация электронов на стенке часто даже сильнее отличается от нуля, чем концентрация интересующих нас частиц.

Следует подчеркнуть, что могут наблюдаться такие условия разряда, при которых для электронов еще вообще не наступил диффузионный режим в виду большой длины их свободного пробега, а для атомов или фотонов этот режим уже наступил.

Мы во всех случаях однако будем пользоваться соотношением (10), определяя μ из результатов зондовых измерений, так как при соответствующем μ (10) достаточно точно описывает истинное распределение электронов.

Другое возражение против применения (10), уже в области более высоких давлений и плотностей тока, может быть выдвинуто в связи с ролью возбужденных атомов в процессах ионизации.

Шоттки [8] пренебрегал ступенчатой ионизацией. Клярфельд [9] показал, что как раз в условиях применимости теории Шоттки ступенчатая ионизация возбужденных атомов является основным процессом, приводящим к возникновению зарядов в разряде. Можно показать однако, что характер процесса ионизации слабо влияет на вид q_e [10].

5. В случае слабого тушения дифференциальное уравнение для возбужденных атомов будет иметь следующий вид [1, 3]:

$$D_a \frac{d}{dr}\left(r\frac{dn_a}{dr}\right) = -\alpha_a n r J_0\left(\mu\frac{r}{a}\right). \tag{11}$$

Это уравнение интегрируется просто квадратурами, и, воспользовавшись свойствами функций Бесселя, получаем:

$$\frac{n_a(r)}{n_a(a)} = G_0 J\left(\mu\frac{r}{a}\right) + (1-G), \tag{12}$$

где

$$n_a(0) = \frac{\alpha_a n a^2}{D_a\mu^2}\cdot\frac{1}{G}, \tag{13}$$

$$G = \frac{1-\dfrac{n_a(a)}{n_a(0)}}{1-J_0(\mu)} \tag{14}$$

и $\dfrac{n_a(a)}{n_a(0)}$ определяется из граничного условия (6):

$$\frac{n_a(a)}{n_a(0)} = \frac{p}{1+p}, \tag{15}$$

где

$$p = \frac{2}{3}\,\frac{\lambda}{a}\,\frac{\mu J_1(\mu)}{1-J_0(\mu)} \approx \frac{4}{3}\,\frac{\lambda}{a}\left[1-\left(\frac{\mu}{4}\right)^2\right]. \tag{16}$$

В (16) мы пренебрегли δ по сравнению с единицей; если учесть δ, то в p появляется множитель $\dfrac{1}{1-\delta}$.

Приближенное выражение для p получено с достаточной точностью для $\mu \leqslant 2.4$ (при помощи разложения в ряды).

Из (15) и (16) следует, что отношение концентрации на стенке к максимальной близко просто к $\dfrac{\lambda}{a}$.

В формуле (13) для $n_a(0)$ в отличие от обычного выражения, соответствующего распределению по функции Бесселя $\left(\dfrac{\alpha_a n a^2}{D_a\mu^2}\right)$, появляется множитель $\dfrac{1}{G}$, который тем сильнее отличается от единицы, чем сильнее распределение атомов отличается от распределения электронов $\left(\text{ведь } J_0(\mu) = \dfrac{n_e(a)}{n_e(0)}\right)$.

6. В случае весьма сильного тушения дифференциальное уравнение для возбужденных атомов приобретает следующий асимптотический вид [3]:

$$y_a'' + \frac{1}{t}y_a' - y_a = -1, \tag{17}$$

где y_a — «приведенная» концентрация возбужденных атомов, $t = \dfrac{r}{a}\sqrt{B_a}$, $B_a = \mu^2\beta_a\tau_a$, β_a — вероятность тушения.

Решение уравнения (17) при граничном условии (6) (δ опять пренебрегаем):

$$y_a(r) = 1 - \frac{I_0\left(\sqrt{B_a}\,\frac{r}{a}\right)}{I_0(\sqrt{B_a}) + \frac{2}{3}\,\frac{\lambda}{a}\,\sqrt{B_a}\,I_1(\sqrt{B_a})}, \tag{18}$$

I_0 и I_1 — функции Бесселя от чисто мнимого аргумента.

Это решение отличается от полученного ранее ([1],[3]) появлением второго члена в знаменателе дроби.

При достаточно большом $\sqrt{B_a}$ можно положить $I_1(\sqrt{B_a})$ равным $I_0(\sqrt{B_a})$ ([11]), тогда:

$$y_a(a) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\,\frac{a}{\lambda}\,\frac{1}{\sqrt{B_a}}}. \tag{19}$$

Если воспользоваться выражениями для B_r; τ_r (индекс r соответствует излучению) и тем, что для фотонов коэффициент диффузии равен $\frac{1}{3}\,\frac{\lambda^2}{\tau}$, где τ — продолжительность жизни изолированного возбужденного атома, то получим:

$$y_r(a) = \frac{1}{1 + \frac{3}{2\sqrt{3\tau\beta_a}}}. \tag{20}$$

Так как $\tau\beta_r$ обычно на два-три порядка меньше единицы ($\tau \ll \tau_r$), то второй член в знаменателе значительно больше единицы и

$$y_r(a) \approx \frac{2}{3}\sqrt{3\tau\beta_r}. \tag{21}$$

Из (18) и (21) следует, что поправки, вносимые уточнением граничных условий, существенны в случае сильного тушения только для точек, близких к стенкам разрядной трубки.

Экспериментальная проверка приведенных в данном сообщении соотношений ведется в настоящее время в нашей лаборатории при помощи люминесцирующих зондов.

Вопрос о применении граничного условия (6) к теории действия самих зондов будет разобран отдельно.

Всесоюзный электротехнический институт.
Москва.

Поступило
10 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Фабрикант, ДАН, XIX, 385 (1938). [2] В. Фабрикант, ДАН, XIX, 389 (1938). [3] В. Фабрикант, ЖЭТФ, 8, 549 (1938). [4] В. Фабрикант, ДАН, XXII, № 9 (1939). [5] W. de Groot, Physica, 8, 23 (1928). [6] J. Ryde, B. Cooper, Proc. Roy. Soc., **131**, 451, 464 (1931); Proc. Int. Illuminat. Congress, 387 (1931). [7] см. напр. L. Loeb, Kinetic Theory of Gases, N. Y. (1934). [8] W. Schottky, Phys. ZS., **25**, 342, 635 (1924). [9] Б. Клярфельд, ИОМЕН, с. 495 (1938); ЖТФ, **11**, 47 (1938). [10] Технич. отчет ВЭИ, 15—164 (1938). [11] Р. Кузьмин, Бесселевы функции, форм. (34) (1935).