Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. П. КУФАРЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 7 III 1939)

С. Г. Лехницким в 1936 г. было найдено решение задачи о напряжениях в неограниченной анизотропной пластинке, ослабленной эллиптическим отверстием (1).

В данной заметке показывается, что метод, который был применен С. Г. Лехницким для решения указанной задачи, в соединении со способом решения плоской задачи теории упругости для эллиптической изотропной пластинки, предложенным Н. И. Мусхелишвили (2), дает также возможность решить задачу для ограниченной однородной анизотропной пластинки эллиптического сечения. При изложении я пользуюсь почти всюду обозначениями, принятыми в работах Лехницкого.

Ограничимся рассмотрением случая, когда на границе пластинки заданы напряжения. Зададим уравнение контура пластинки в виде

$$z = \varphi(\vartheta) = a\cos\vartheta + ib\sin\vartheta. \tag{1}$$

Задача сводится к определению двух функций $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$ комплексных переменных

$$z_1 = x + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y, \tag{2}$$

однозначных и регулярных соответственно в областях S_1, S_2, ограниченных эллипсами

$$\Gamma_1:\quad z_1 = \varphi_1(\vartheta) = a\cos\vartheta + \mu_1 b\sin\vartheta, \tag{3_1}$$
$$\Gamma_2:\quad z_2 = \varphi_2(\vartheta) = a\cos\vartheta + \mu_2 b\sin\vartheta \tag{3_2}$$

и удовлетворяющих при $z_1 = \varphi_1(\vartheta)$, $z_2 = \varphi_2(\vartheta)$ условиям:

$$2R[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] = P(\vartheta), \tag{4}$$
$$2R[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)] = Q(\vartheta), \tag{5}$$

где $P(\vartheta)$, $Q(\vartheta)$ — заданные периодические функции с периодом 2π.

При этом можно считать, что в комплексных постоянных

$$\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \tag{6}$$

мнимые части β_1, β_2 положительны (3):

$$\beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0. \tag{7}$$

Для решения задачи проведем в области $S_k (k=1, 2)$ разрез l_k по отрезку большей оси эллипса Γ_k, соединяющему точки $z_k = c_k$ и $z_k = -c_k$, где

$$c_k^2 = a^2 + \mu_k^2 b^2 \quad (k=1, 2). \tag{8}$$

Рассмотрим далее функцию

$$z_k(\zeta_k) = \frac{a - i\mu_k b}{2} \zeta_k + \frac{a + i\mu_k b}{2} \frac{1}{\zeta_k}. \tag{9}$$

Легко проверить, что этой функцией отображается на область S_k с разрезом кольцо

$$B_k: \quad \rho_k \leqslant |\zeta_k| \leqslant 1, \tag{10}$$

где

$$\rho_k = \sqrt{\left| \frac{a + i\mu_k b}{a - i\mu_k b} \right|} \tag{11}$$

[$\rho_k < 1$ в силу условия (7)].

При этом из формул:

$$z_k(e^{i\vartheta_k}) = a \cos \vartheta_k + \mu_k b \sin \vartheta_k \tag{12}$$

и

$$z_k(\rho_k e^{i\vartheta_k}) = c_k \cos(\vartheta_k + \gamma_k)\,^*, \tag{13}$$

где

$$\gamma_k = \arg \frac{a - i\mu_k b}{c_k}, \tag{14}$$

следует, что эллипсу Γ_k соответствует при отображении окружность $|\zeta_k| = 1$ и разрезу l_k — окружность $|\zeta_k| = \rho_k$, причем точкам

$$\zeta_k' = \rho_k e^{i\vartheta_k}, \quad \zeta_k'' = \rho_k e^{-i(\vartheta_k + 2\gamma_k)}$$

соответствует одна точка разреза:

$$z_k(\rho_k e^{i\vartheta_k}) = z_k(\rho_k e^{-i(\vartheta_k + 2\gamma_k)}). \tag{15}$$

Функция $\Phi_k(z_k)$ перейдет при отображении в функцию $F_k(\zeta_k)$, однозначную и регулярную в кольце B_k, и следовательно может быть разложена в ряд:

$$\Phi_k(z_k) = F_k(\zeta_k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mk} \zeta_k^m, \tag{16}$$

где

$$\zeta_k = \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - (a^2 + \mu_k^2 b^2)}}{a - i\mu_k b}, \tag{17}$$

и для корня берется то значение, для которого выполняются неравенства (10).

Между коэффициентами этого ряда выполняются соотношения:

$$A_{-mk} = \rho_k^{2m} e^{-2im\gamma_k} A_{mk} = \left(\frac{a + i\mu_k b}{a - i\mu_k b} \right)^m A_{mk}, \tag{18}$$

---

* При проверке формулы (13) удобно воспользоваться соотношениями:

$$\frac{a + i\mu_k b}{\rho_k} = \frac{c_k}{\bar{c}_k}(a + i\bar{\mu}_k b)\rho_k, \quad \rho_k \left| \frac{a - i\mu_k b}{c_k} \right| = 1.$$

вытекающие из условия равенства значений функции $F_k(\zeta_k)$ в точках ζ_k' и ζ_k'' [см. (15), (16)].

Разыскивая функции $\Phi_1(z_1), \Phi_2(z_2)$ в виде рядов (16), мы должны определить коэффициенты A_{mk} из граничных условий (4), (5).

Но это легко выполнить в силу того, что при $\zeta_1=\zeta_2=e^{i\vartheta}$ имеем по формуле (12):

$$z_k(\zeta_k)=\varphi_k(\vartheta)$$

и следовательно

$$\Phi_k(\varphi_k(\vartheta))=F_k(e^{i\vartheta})=\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{mk}e^{im\vartheta}. \tag{19}$$

Разлагая вещественные функции $P(\vartheta)$, $Q(\vartheta)$ в ряды Фурье

$$P(\vartheta)=a_0+\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{im\vartheta}+\bar{a}_m e^{-im\vartheta}, \tag{20}$$

$$Q(\vartheta)=b_0+\sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{im\vartheta}+\bar{b}_m e^{-im\vartheta}, \tag{21}$$

подставляя (19), (20), (21) в условия (4), (5) и приравнивая коэффициенты Фурье в левой и правой части получаемых равенств, найдем следующие уравнения:

$$\begin{gathered} A_{m1}+A_{m2}+\overline{A}_{-m1}+\overline{A}_{-m2}=a_m, \\ \mu_1 A_{m1}+\mu_2 A_{m2}+\bar{\mu}_1\overline{A}_{-m1}+\bar{\mu}_2\overline{A}_{-m2}=b_m. \quad (m=1, 2, 3\ldots) \end{gathered} \tag{22}$$

Эти уравнения вместе с соотношениями (18) определяют коэффициенты A_{mk} [A_{01}, A_{02} остаются произвольными (1). Коэффициенты A_{1k}, A_{-1k} при условии равенстве нулю главного момента внешних сил определяются с некоторым произволом, не имеющим значения при определении напряжений].

Научно-исследовательский институт
математики и механики.
Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева.

Поступило
22 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Лехницкий, ДАН, IV, № 3 (1936). [2] Н. И. Мусхелишвили, «Некоторые задачи теории упругости», стр. 195 (1933). [3] С. Г. Лехницкий, Прикладная математика и механика, т. I, вып. I, стр. 80 (1937).