Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. Н. САВИН

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 3 III 1939)

В настоящей статье указываются решения некоторых задач теории упругости плоской однородной анизотропной среды. Рассматриваемые ниже задачи были решены С. Г. Лехницким [1,2] иным путем. Так, задача о распределении напряжений возле эллиптического отверстия решена им с помощью рядов, решение же задачи о распределении напряжений в полуплоскости основано на применении интеграла Фурье и дано им для случая, когда материал полуплоскости имеет 3 плоскости упругой симметрии.

Эти задачи могут быть чрезвычайно просто решены в замкнутой форме одним и тем же методом в общем случае, если воспользоваться известной формулой Шварца, восстанавливающей аналитическую функцию по заданной вещественной части ее на контуре.

Решение плоской задачи теории упругости при заданных внешних силах для однородной анизотропной среды сводится к определению двух аналитических функций $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ [1], где $z_1 = x + s_1 y$; $z_2 = x + s_2 y$, удовлетворяющих контурным условиям *:

$$\left.\begin{aligned} 2Re[\varphi(z_1) + \psi(z_2)] &= f_1 \\ 2Re[s_1\varphi(z_1) + s_2\psi(z_2)] &= f_2 \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

где Re — символ вещественной части, $s_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ и $s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ — комплексные постоянные ($\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$), корни уравнения:

$$\beta_{11}s^4 - 2\beta_{16}s^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})s^2 - 2\beta_{26}s + \beta_{22} = 0, \tag{2}$$

β_{jk} — постоянные, связанные с упругими постоянными материала. Правые части уравнений (1) — заданные функции на контуре рассматриваемой области:

$$f_1 = -\int_0^s \overline{Y}_n\,ds + C_1, \quad f_2 = \int_0^s \overline{X}_n\,ds + C_2, \tag{3}$$

где $\overline{X}_n$ и $\overline{Y}_n$ — проекции на оси координат внешних усилий, приложенных к контуру рассматриваемой области.

---

* Мы несколько изменили обозначения, принятые в цитированной статье.

Компоненты напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} определяются по функциям $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ формулами:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 2Re[s_1^2\varphi'(z_1)+s_2^2\psi'(z_2)]\\ \sigma_y &= 2Re[\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)]\\ \tau_{xy} &= -2Re[s_1\varphi'(z_1)+s_2\psi'(z_2)]\end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

§ 1. Напряжения в анизотропной плоскости с эллиптическим отверстием. Допустим, что к контуру эллиптического отверстия, находящегося в неограниченной анизотропной пластине, приложены внешние усилия $\overline{X}_n$ и $\overline{Y}_n$. Оси координат Ox и Oy направим соответственно по осям эллипса.

Контурные условия (1) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}2Re[\varphi(z_1)+\psi(z_2)] &= -\int_0^s \overline{Y}_n\,ds + C_1\\ 2Re[s_1\varphi(z_1)+s_2\psi(z_2)] &= \int_0^s \overline{X}_n\,ds + C_2.\end{aligned}\right\}. \tag{1.1}$$

Наряду с плоскостью z будем рассматривать также плоскости z_1 и z_2, которые получаются из нее афинным преобразованием: $x_1 = x + \alpha_1 y$; $y_1 = \beta_1 y$; $x_2 = x + \alpha_2 y$; $y_2 = \beta_2 y$, где $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$. При этом преобразовании заданный эллипс на плоскости z переходит в эллипсы же соответственно на плоскостях z_1 и z_2. Отобразив внешность заданного эллипса и внешность эллипсов на плоскостях z_1 и z_2 на внутренность единичного круга при помощи функций

$$\left.\begin{aligned}z &= \omega(\zeta) = \frac{a-b}{2}\zeta + \frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{\zeta}\\ z_1 &= \omega_1(\zeta) = \frac{a+is_1b}{2}\cdot\zeta + \frac{a-is_1b}{2}\cdot\frac{1}{\zeta}\\ z_2 &= \omega_2(\zeta) = \frac{a+is_2b}{2}\zeta + \frac{a-is_2b}{2}\cdot\frac{1}{\zeta}\end{aligned}\right\}, \tag{2.1}$$

получим, что точкам на контурах этих эллипсов, находящихся в афинном соответствии, будет соответствовать одна точка на контуре единичного круга.

Контурные условия (1.1) в преобразованной области примут вид:

$$\left.\begin{aligned}2Re[\Phi(\sigma)+\Psi(\sigma)] &= f_1(\theta)\\ 2Re[s_1\Phi(\sigma)+s_2\Psi(\sigma)] &= f_2(\theta)\end{aligned}\right\}, \tag{3.1}$$

где $\Phi(\sigma) = \varphi[\omega_1(\sigma)]$; $\Psi(\sigma) = \psi[\omega_2(\sigma)]$.

Применяя к уравнениям (3.1) формулу Шварца (4.1)

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma U(\theta)\frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0, \tag{4.1}$$

где $U(\theta)$ — вещественная часть функции $F(\zeta)$ на контуре единичного круга, α_0 — некоторая вещественная постоянная, и разрешая полученные два уравнения относительно искомых функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= \frac{i}{4\pi(s_1-s_2)}\int_\gamma [s_2f_1(\theta)-f_2(\theta)]\,\frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\frac{d\sigma}{\sigma}\\ \Psi(\zeta) &= -\frac{i}{4\pi(s_1-s_2)}\int_\gamma [s_1f_1(\theta)-f_2(\theta)]\,\frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\frac{d\sigma}{\sigma}\end{aligned}\right\}. \tag{5.1}$$

Подставляя вместо ζ в найденные функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ ее значение через z_1 и z_2 соответственно

$$\zeta=\frac{z_1-\sqrt{z_1^2-(a^2+s_1^2b^2)}}{a+is_1b}=\frac{a-is_1b}{z_1+\sqrt{z_1^2-(a^2+s_1^2b^2)}} \tag{6.1}$$

в функцию $\Phi(\zeta)$ и

$$\zeta=\frac{z_2-\sqrt{z_2^2-(a^2+s_2^2b^2)}}{a+is_2b}=\frac{a-is_2b}{z_2+\sqrt{z_2^2-(a^2+s_2^2b^2)}} \tag{7.1}$$

в функцию $\Psi(\zeta)$, найдем окончательный вид искомых функций $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$.

Так например, в случае, когда контур отверстия свободен от внешних напряжений и напряженное состояние на бесконечности представляет собой растяжение величины p в направлении, составляющем угол α с осью Ox, функции $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z_1)&=-\frac{ip(a-is_1b)}{4(s_1-s_2)}\cdot\frac{b(s_2\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha)+ia(2s_2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha)}{z_1+\sqrt{z_1^2-(a^2+s_1^2b^2)}}\\ \psi(z_2)&=\frac{ip(a-is_2b)}{4(s_1-s_2)}\cdot\frac{b(s_1\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha)+ia(2s_1\sin^2\alpha+\sin 2\alpha)}{z_2+\sqrt{z_2^2-(a^2+s_2^2b^2)}}\end{aligned}\right\}. \tag{8.1}$$

§ 2. Решение основных задач для анизотропной полуплоскости. Направим ось Ox по границе полуплоскости и будем рассматривать ту полуплоскость, для точек которой $y\geqslant 0$. Контурные условия (1) в данном случае будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}2Re[\varphi(x)+\psi(x)]&=-\int_0^x\overline{Y}_n\,dx+C_1=f_1\\ 2Re[s_1\varphi(x)+s_2\psi(x)]&=\int_0^x\overline{X}_n dx+C_2=f_2\end{aligned}\right\}. \tag{1.2}$$

Формула Шварца для полуплоскости имеет вид:

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{1+zx}{x-z}\cdot\frac{dx}{1+x^2}+i\beta_0, \tag{2.2}$$

где $f(x)$ — вещественная часть функции $F(z)$ на границе полуплоскости, β_0 — некоторая вещественная постоянная.

Применяя формулу (2.2) к контурным условиям (1.2) и разрешая полученные уравнения относительно искомых функций $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$, получим их в окончательном виде:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z_1)&=\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\int_{-\infty}^{+\infty}[s_2f_1(x)-f_2(x)]\,\frac{1+z_1x}{x-z_1}\cdot\frac{dx}{1+x^2},\\ \psi(z_2)&=-\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\int_{-\infty}^{+\infty}[s_1f_1(x)-f_2(x)]\,\frac{1+z_2x}{x-z_2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}.\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Отметим некоторые примеры:

1. Пусть к границе полуплоскости в интервале $(-a,\ +a)$ приложены равномерно распределенные нормальные усилия $+P$ и касательные усилия T.

Функции $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ для этого случая будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z_1) &= i\frac{s_2P-T}{2\pi(s_1-s_2)}\left[(z_1+a)\ln\frac{z_1-a}{z_1+a}-2a\ln(a-z_1)\right]\\ \psi(z_2) &= -i\frac{s_1P-T}{2\pi(s_1-s_2)}\left[(z_2+a)\ln\frac{z_2-a}{z_2+a}-2a\ln(a-z_2)\right]\end{aligned}\right\}. \tag{4.2}$$

2. К границе полуплоскости в начале координат приложена наклонная сосредоточенная сила P, образующая угол α с осью Ox. Функции $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z_1) &= \frac{iP(\cos\alpha+s_2\sin\alpha)}{2\pi(s_1-s_2)}\ln z_1\\ \psi(z_2) &= -\frac{iP(\cos\alpha+s_1\sin\alpha)}{2\pi(s_1-s_2)}\ln z_2\end{aligned}\right\}. \tag{5.2}$$

3. Допустим, что в начале координат приложена сосредоточенная нормальная сжимающая сила P. Полагая в формулах (5.2) $\alpha=+\frac{\pi}{2}$, из формул (4) легко найдем компоненты напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy}. Примем ради простоты, что $s_1=i\beta_1$; $s_2=i\beta_2$, т. е. что материал полуплоскости имеет три плоскости упругой симметрии; при этом будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{P\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi}\cdot\frac{x^2y}{(x^2+\beta_1^2y^2)(x^2+\beta_2^2y^2)}\\ \sigma_y &= -\frac{P\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi}\cdot\frac{y^3}{(x^2+\beta_1^2y^2)(x^2+\beta_2^2y^2)}\\ \tau_{xy} &= -\frac{P\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{\pi}\cdot\frac{xy^2}{(x^2+\beta_1^2y^2)(x^2+\beta_2^2y^2)}\end{aligned}\right\}. \tag{6.2}$$

Полагая в уравнениях (6.2) $\beta_1=\beta_2=1$, получим формулы для напряжений в случае изотропной среды.

С незначительными изменениями так же легко в замкнутой форме решается и вторая основная задача теории упругости, т. е. задача при заданных граничных смещениях.

В заключение выражаю благодарность проф. С. Г. Михлину за весьма ценные указания.

Институт горной механики
Академии Наук УССР.
Днепропетровск.

Поступило
4 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

[1] С. Г. Лехницкий, ДАН, IV, № 3 (1936). [2] С. Г. Лехницкий, Некоторые случаи плоской задачи теории упругости анизотропного тела, Сборник «Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций», стр. 160—163.