Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. ВАЙНБЕРГ

О СВОБОДНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЗАМКНУТЫХ КОС

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 III 1939)

Заметка эта связана со статьей А. А. Маркова «О свободной эквивалентности замкнутых кос» (1).

Мне удалось доказать, что высказанное в конце статьи предложение действительно справедливо, и одновременно выяснить, что операция типа $\mathfrak{T}_5$* сводится к операциям остальных типов. Таким образом имеет место утверждение:

*две нормальные ** косы тогда и только тогда свободно эквивалентны, когда символ одной косы можно перевести в символ другой косы операциями типов* $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_4$ и $\mathfrak{T}_6$.

Доказательство можно провести следующим образом:

Сперва доказывается, что если операция $\mathfrak{V}_{a,d}^{b,c}$ применима к зацеплению V, то существуют две точки a' и d' такие, что имеет место равенство:

$$\mathfrak{V}_{a,d}^{b,c} V = (\mathfrak{U}_{c,d}^{d'})^{-1} (\mathfrak{W}_{d',d}^{a',b})^{-1} \mathfrak{W}_{a,a'}^{c,d'} \mathfrak{U}_{a,b}^{a'} V. \tag{1}$$

Затем доказываются два предложения:

I. Две нормальные и эквивалентные косы V и W можно связать цепью нормальных кос $V = V_1, V_2 \dots V_m = W$ таких, что косы каждой пары $(V_i, V_{iн})$, где $i = 1, 2, \dots, m-1$, связаны одной из операций типов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{W}$.

II. Пусть $W = \mathfrak{W}_{a,d}^{b,c} V$, где V и W—нормальные косы. Тогда существуют точки a', b', c', d' и нормальные косы V' и W', соответственно связанно эквивалентные с V и W, такие, что

$$\mathrm{Pr}[a', b', c', d']\, \mathrm{Pr}[V'] = \mathrm{Pr}[a', d'] \tag{2}$$

$$W' = \mathfrak{W}_{a',d'}^{b',c'} V', \tag{3}$$

где $\mathrm{Pr} M$ есть проекция множества M на плоскость, перпендикулярную оси.

---

* См. упомянутую статью А. А. Маркова. То же относится и к другим обозначениям.

** Замкнутую косу мы называем нормальной, если: 1) всякая прямая, параллельная оси A, имеет общие точки не больше, чем с двумя ребрами косы, 2) число параллельных оси A прямых, имеющих две общие точки с косой, конечно и 3) во всякой плоскости, проходящей через ось A, лежит не более одной параллельной оси A прямой, имеющей две общие точки с косой.

Будем теперь вести нумерацию нитей по направлению к оси. Тогда легко видеть, что операции типа $\mathfrak{W}$ над косой V при соблюдении условия (2) соответствует операция типа $\mathfrak{T}_6$ над символом, соответствующим V, а переходу от косы V к косе, связанно эквивалентной с ней, соответствует применение операций типов $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_4$. Обратно: операциям типов $\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_4$ соответствуют переходы от одних кос к косам, связанно эквивалентным, а добавлению операций типа $\mathfrak{T}_6$ соответствует добавление операций типа $\mathfrak{W}$ при соблюдении условия (2).

Институт математики и механики
Ленинградского госуд. университета.

Поступило
5 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Матем. сборн., **1 (43)**, 73—78 (1936).