

## ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РЕЖИМ ВАЛКА-КРИСТАЛЛИЗАТОРА ПРИ ДВУХВАЛКОВОЙ ЗАКАЛКЕ РАСПЛАВА

Рассмотрим задачу расчета температурного режима валка-кристаллизатора при двухвалковой закалке расплава в виде полого цилиндра конечной длины с толщиной стенки  $s$ , вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг продольной оси, на который в момент времени  $t_0 = 0$  оказывает действие распределенный в некоторой области  $S_0 \{r = R_0; 0 \leq \varphi \leq 2\varphi_0; z_1 \leq z \leq z_2\}$  тепловой источник  $Q$ , вращающийся вокруг той же оси с постоянной угловой скоростью. Теплофизические свойства полого цилиндра принимались не зависящими от температуры, а теплообмен с окружающей средой осуществлялся по закону Ньютона (рис. 1).

Данная математическая задача состоит в нахождении функции  $T(r, \varphi, z, Fo)$ , описывающей температурное поле валка-кристаллизатора в области  $r \in (R_1, R_2)$ ;  $z \in (z_1, z_2)$ ;  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ;  $Fo > 0$ .

Уравнение теплопроводности запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f(r, \varphi, z, t), \quad (8)$$

где  $T(r, \varphi, z, t)$  — текущая температура валка-кристаллизатора;  $\Delta$  — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат;  $a^2 = \lambda / c_p \rho'$  — коэффициент температуропроводности;  $c_p, \rho', \lambda$  — удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности материала бандажа валка;  $f$  — функция, описывающая действие в области  $S_0$  источника тепла;  $R_1, R_2$  — внутренний и наружный радиусы бандажа.

Функцию  $f$  можно представить следующим образом:

$$f(r, \varphi, z, t) = \frac{QR_0}{c_p \rho' S_0} \delta(r - R_0) [\theta(z - z_1) - \theta(z - z_2)] \times \\ \times [\theta(\varphi - \varphi') - \theta(\varphi - \varphi' - 2\varphi_0)], \\ \varphi' = \omega \sum_{k=0}^{\infty} (t - t_k) [\theta(t - t_k) - \theta(t - t_{k+1})], \quad t_k = \frac{2\pi k}{\omega},$$

где  $S_0 = 2\varphi_0 R_0 (z_2 - z_1)$  — площадь области, в которой действует источник тепла.

Выбранная здесь физическая модель определения температурного поля цилиндрической оболочки конечной толщины  $s$  при действии на нее распределенного в области  $S_0$  теплового источника, вращающегося вокруг оси  $z$  с постоянной угловой скоростью, является достаточным приближением к расчету температурного поля двух оболочек конечной толщины в процессе их вращения при наличии между ними источника тепла в области  $\{r = R_2; 0 \leq \varphi \leq 2\varphi_0; z_1 \leq z \leq z_2\}$ .

Данное приближение имеет место, если коэффициент теплообмена  $k_2$  внешней боковой поверхности валка с воздухом существенно меньше, чем коэффициент теплообмена  $k_1$  внутренней боковой поверхности бандажа валка с водой, которая используется в качестве охладителя.

Граничные условия поставленной задачи с учетом выбранной физической модели записываются в виде

$$\frac{\partial T(r, \varphi, 0, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T(r, \varphi, L, t)}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(R_2, \varphi, z, t)}{\partial r} + \alpha_2 T(R_2, \varphi, z, t) = \alpha_2 T_2,$$

$$\frac{\partial T(R_1, \varphi, z, t)}{\partial r} - \alpha_1 T(R_1, \varphi, z, t) = -\alpha_1 T_1,$$

где  $T_2, T_1$  — температура воздуха и воды соответственно;  $\alpha_1 = k_1/\lambda$ ;  $\alpha_2 = k_2/\lambda$ .

Начальным условием является температура

$$T(r, \varphi, z, 0) = T_0(r), \quad (10)$$

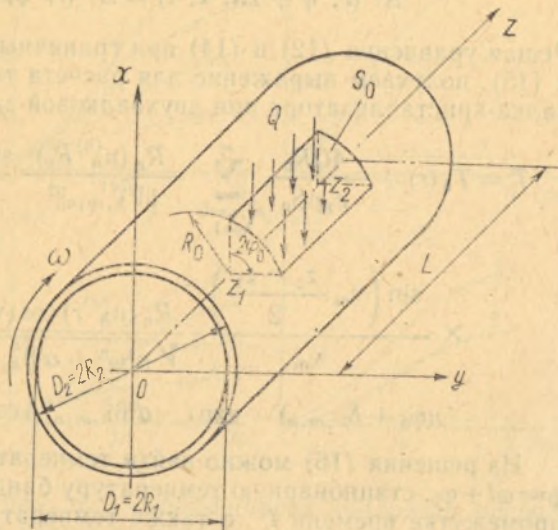


Рис. 1. Схема к расчету температурного режима валка-кристаллизатора

которая является стационарной температурой бандажа валка в силу ее симметрии, так как время до момента  $t_0 = 0$ , когда начинает действовать источник тепла, неограниченно велико.

Кроме того, решение задачи нахождения температурного поля бандажа  $T(r, \varphi, z, t)$  валка должно быть периодической функцией, т. е.

$$T(r, \varphi + 2\pi, z, t) = T(r, \varphi, z, t). \quad (11)$$

Решение поставленной задачи ищем в виде отклонения  $\Delta T(r, \varphi, z, t)$  от решения  $T = T_0 + \Delta T$  стационарной задачи

$$\Delta T_0 = 0 \quad (12)$$

при граничных условиях

$$\left. \frac{\partial T_0}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T_0}{\partial z} \right|_{z=L} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial T_0}{\partial r} + \alpha_2 T_0 \right|_{r=R_2} = \alpha_2 T_2; \quad \left. \frac{\partial T_0}{\partial r} - \alpha_1 T_0 \right|_{r=R_1} = -\alpha_1 T_1. \quad (13)$$

Подставляя представление  $T = T_0 + \Delta T$  в уравнение (8) и условия (9) — (11), а также учитывая, что функция  $T_0$  удовлетворяет уравнению (12) и граничному условию (13), получаем задачу для нахождения функции  $\Delta T$

$$\frac{\partial (\Delta T)}{\partial t} = a^2 \Delta (\Delta T) + f(r, \varphi, z, t) \quad (14)$$

при граничных и начальных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0; \quad \frac{\partial(\Delta T)}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0, \\ \frac{\partial(\Delta T)}{\partial r} + \alpha_2(\Delta T) \Big|_{r=R_1} &= 0, \\ \frac{\partial(\Delta T)}{\partial r} - \alpha_1(\Delta T) \Big|_{r=R_1} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Delta T(r, \varphi + 2\pi, z, t) = \Delta T(r, \varphi, z, t); \quad \Delta T|_{t=0} = 0.$$

Решая уравнения (12) и (14) при граничных и начальных условиях (13) и (15), получаем выражение для расчета температурного поля бандажа валка-кристаллизатора при двухвалковой закалке расплава

$$\begin{aligned} T = T_0(r) + \frac{4QR_0}{c_p \rho S_0} \sum_{\substack{m, n=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{R_n(\mu_k^{(n)} R_0)}{\|V_{k, m, n}^{(c)}\|^2} \frac{\sin(n\varphi_0)}{n} \cos\left(v_m \frac{z_2 + z_1}{2}\right) \times \\ \times \frac{\sin\left(v_m \frac{z_2 - z_1}{2}\right)}{v_m} \frac{R_n(\mu_k^{(n)} r) \cos(v_m z)}{\sqrt{n^2 \omega^2 + a^4 \beta_{k, m, n}^4}} \{ \cos(n\varphi - n\omega t - \\ - n\varphi_0 + \delta_{k, m, n}) - \exp(-a^2 \beta_{k, m, n}^2 t) \cos(n\varphi + n\varphi_0 + \delta_{k, m, n}) \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из решения (16) можно найти температуру в окружном направлении  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , стационарную температуру бандажа при достаточно большом промежутке времени  $t$ , а также температуру валка при распределении источника тепла по всей длине образующей бандажа, т. е. при  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = L$ .

Последний случай особенно интересен с точки зрения того, что позволяет рассчитать температурное поле бандажа валка процесса двухвалковой закалки расплава при наличии боковых ограничителей и значительного объема металла, находящегося в межвалковом пространстве, т. е. когда высота зеркала ванны большая. В этом случае выражение (16) имеет вид

$$T \Big|_{\substack{\varphi = \omega t + \varphi_0 \\ t \rightarrow \infty \\ z_1 = 0; z_2 = L}} = T_0(r) + \frac{2QR_0 a^2}{c_p \rho S_0} \sum_{\substack{n=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{R_n(\mu_k^{(n)} R_0) R_n(\mu_k^{(n)} r) (\mu_k^{(n)}) \sin(n\varphi_0)}{\|V_{k, n}^{(c)}\|^2 n [n^2 \omega^2 + a^4 (\mu_k^{(n)})^4]}.$$

$$\|V_{k, n}^{(c)}\|^2 = \frac{\pi \varepsilon_n}{2(\mu_k^{(n)})^2} \{ (\alpha_2^2 R_2^2 + \bar{R}_2^2 - n^2) R_n^2(\bar{R}_2) - (\alpha_1^2 R_1^2 + \bar{R}_1^2 - n^2) R_n^2(\bar{R}_1) \},$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n \neq 0, \\ 2, & n = 0. \end{cases}$$

Как показали расчеты температурных полей бандажа валка-кристаллизатора для процесса двухвалковой закалки расплава, с течением времени при увеличении толщины стенки бандажа амплитуда колебаний температуры внутри его увеличивается. При этом при определенном соотношении  $R_1$  и  $R_2$  оболочки валка температурное поле последней становится осесимметричным.

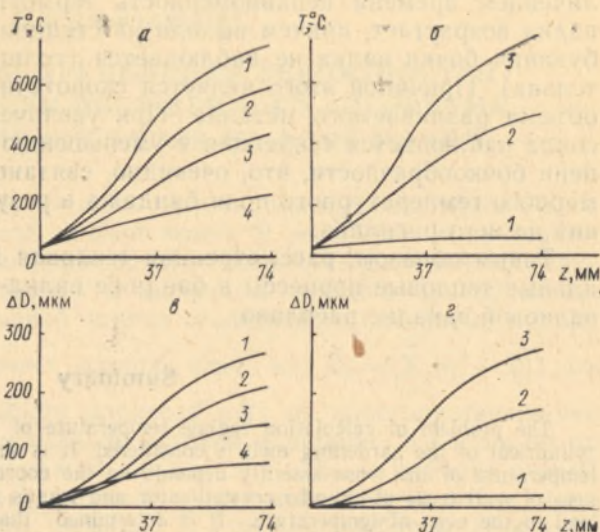
Расчет распределения средней температуры бандажа показывает существенную зависимость ее от продольной координаты и толщины стенки бандажа валка-кристаллизатора (рис. 2, б). Уменьшение толщины ведет к выравниванию средней температуры, а при  $s \rightarrow 0$  — к установлению квазистационарного режима охлаждения, так как термическое со-

противление теплопроводности бандажа кристаллизатора мало. Увеличение длины раздаточного сопла при прочих равных условиях ведет к уменьшению средней температуры бандажа и более равномерному его нагреву по продольной координате (рис. 2, а).

Зная распределение температуры в бандаже валка-кристаллизатора, можно определить термоупругую деформацию для плоского напряженного состояния. Уравнение термоупругости имеет вид

$$\Delta\psi = (1 + \nu_m)\alpha_m T,$$

Рис. 2. Влияние длины щели раздаточного сопла (а, в) и толщины степени бандажа (б, г) на распределения температуры валка по продольной координате (а, б) и теплового профиля по длине бочки валка-кристаллизатора (в, г): а, в —  $Fo = 0,03$ ;  $s = 25$  мм; 1, 2, 3, 4 —  $L = 70$ ; 90; 115; 145 мм соответственно; б, г —  $Fo = 0,03$ ;  $L = 70$  мм; 1, 2, 3 —  $s = 1$ ; 15; 25 мм соответственно



где  $\nu_m$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha_m$  — коэффициент теплового расширения металла;  $\psi$  — потенциал термоупругого перемещения.

Поскольку термоупругие перемещения происходят в узкой области вблизи поверхности раздела расплав—подложка, в цилиндрической системе координат имеем следующее приближенное уравнение термоупругости:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = (1 + \nu_m)\alpha_m T. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) может быть записано следующим образом:

$$\psi = e^{\beta t} e^{k(r-R_2)} (c_1 \cos \lambda_1 + c_2 \sin \lambda_1) + e^{\beta t} e^{\xi(r-R_2)} (c_3 \cos \lambda + c_4 \sin \lambda), \quad (18)$$

где  $\beta$  — коэффициент, характеризующий рост амплитуды температурной волны во времени;  $k$  — волновое число;  $\xi$  — коэффициент, характеризующий рост амплитуды температурной волны в поперечном направлении;  $R_2$  — наружный диаметр валка;  $c_1 \div c_4$  — постоянные интегрирования.

На основании закона Гука можно определить тепловое напряжение, которое соответствует полученному из уравнения (17) и решения (18) потенциалу перемещения  $\psi$ :

$$\sigma_r|_{r=R_2} = \frac{E}{1 + \nu_m} \frac{1}{R_2} \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = \frac{E}{1 + \nu_m} k^2 e^{\beta t} [(c_2 + c_4) \sin \lambda_1 + (c_1 + c_3) \cos \lambda_1],$$

где  $E$  — модуль упругости Юнга.

Данное поверхностное напряжение вызывает тепловую деформацию валка

$$\delta_{th} = 2\sigma_r/Ek$$

в соответствии с имеющимся распределением температуры.

На рис. 2, в, г представлены кривые распределения теплового профиля по длине бочки валка-кристаллизатора при различных значениях координат  $z_1$  и  $z_2$ , что моделирует длину раздаточного сопла. Увеличение длины раздаточного сопла при прочих равных условиях способствует более равномерному набуханию бочки валка, что связано с получением более однородного температурного поля в бандаже (рис. 2, в). При уменьшении толщины последнего термоупругие деформации имеют место, но они весьма малы и ими можно пренебречь (рис. 2, г).

Проведенные экспериментальные исследования показали, что с увеличением времени неравномерность термоупругого расширения бочки валка возрастает, причем выхода на стационарный режим процесса набухания бочки валка не наблюдается (толщина бандажа валка значительна). Причиной этого является скоротечность процесса для данного объема разливаемого металла. При увеличении длины раздаточного сопла наблюдается тенденция к уменьшению абсолютной величины степени бочкообразности, что, очевидно, связано с созданием более равномерного температурного поля бандажа в результате теплового воздействия на него расплава.

Таким образом, рассмотренная тепловая модель верно отражает реальные тепловые процессы в бандаже валка-кристаллизатора при двухвалковой закалке расплава.

### Summary

The problem of calculation regime temperature of the cylinder-crystallizator at two-cylindrical of the hardening melt is considered. It is shown that the distribution average temperature of the truss essentially depends on the coordinate longitudinal and the thickness of wall truss of cylinder-crystallizator and what's more the decrease his of thickness lead to the even of temperature. It is determined that the distribution of profile heat along the length of barrel cylinder essentially depends on the length split of distributive hole and the thickness of wall truss.

Гомельский политехнический институт

Поступила в редакцию  
11.09.92