Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 7

МАТЕМАТИКА

Я. Г. МЕЦХВАРИШВИЛИ

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СЛУЧАЕ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 X 1937)

С. Л. Соболев (1) дает новое определение решения дифференциального уравнения гиперболического типа, называемое им предельным или обобщенным решением. Из этого определения в частности вытекает классическое определение решения.

Определение предельного или обобщенного решения связывается с понятием сильной сходимости.

Рассмотрим суммируемую функцию $U(x, y, t)$ и последовательность суммируемых функций $U_n(x, y, t)$. Составим интеграл по некоторой области трехмерного пространства следующего вида:

$$\iiint\limits_D |U_n(x, y, t) - U(x, y, t)|\, dx\, dy\, dt.$$

Пусть этот интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда принято говорить, что последовательность U_n сильно сходится к U в области D.

Функция $\overline{U}(x, y, t)$ называется предельным или обобщенным решением волнового уравнения:

$$\Box U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (c = \mathrm{const}), \tag{1}$$

если можно построить такую последовательность решений этого уравнения, которая сильно стремится к функции $\overline{U}(x, y, t)$. Очевидно, что не всякая суммируемая функция может служить предельным или обобщенным решением.

С. Л. Соболевым (1) дается необходимое условие того, чтобы функция $\overline{U}(x, y, t)$ была бы обобщенным решением уравнения (1). Это условие выражается следующим интегральным равенством:

$$\iiint\limits_G \overline{U}(x, y, t)\, \Box V\, dx\, dy\, dt = 0, \tag{2}$$

где G—область, ограниченная замкнутой поверхностью S, которая целиком содержится в D. Что касается функции V, то она непрерывна вплоть до поверхности S вместе со своими производными первых двух порядков и уничтожается на этой поверхности вместе со своими производными первого порядка.

С. Л. Соболев показал, что выполнение условия (2) для любой области G и при произвольной функций V, обладающей тем свойством, что ее первые производные по координатам уничтожаются на S, а вторые производные непрерывны вплоть до S, является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы функция $\overline{U}(x, y, t)$ являлась обобщенным или предельным решением.

Естественно возникает вопрос о том, является ли это условие также необходимым и достаточным и для общего уравнения с переменными коэффициентами.

В этой работе устанавливается аналогичное условие для общего случая при двух независимым переменных.

Заодно доказывается, что результаты С. Л. Соболева непосредственно переносятся и на несамосопряженные уравнения с постоянными коэффициентами и любым числом переменных.

Рассмотрим уравнение:

$$LU = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} - \left\{ a(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} + c(x, y) U \right\} = 0. \tag{3}$$

Легко доказать, что необходимое условие для того, чтобы функция $\overline{U}(x, y)$ была обобщенным решением, имеет вид:

$$\iint\limits_{G} \overline{U}(x, y) L^* V\, dx\, dy = 0; \tag{4}$$

где L^* означает оператор, сопряженный с оператором L.

Переходя к доказательству достаточности этого условия, рассмотрим функцию:

$$K_n(x, y) = \frac{1}{I_n} \iint\limits_{r^2 \leqslant \eta_n^2} \overline{U}(x_0, y_0)\, e^{\frac{r^2}{r^2 - \eta_n^2}}\, dx_0\, dy_0,$$

где I_n — величина, зависящая от n, $\lim \eta_n = 0$ при $n \to \infty$, а r—обычное расстояние.

Найдем значения функций $K_n(x, y)$ на характеристиках уравнения (3). Имеем:

$$\varphi_n(x, c_2) = \iint\limits_{S_2} \overline{U}(x, y) V_n(x_0, y_0;\; x,\; c_2)\, dx_0\, dy_0,$$

$$\psi_n(c_1, y) = \iint\limits_{S_1} \overline{U}(x, y) V_n(x_0, y_0;\; c_1,\; y)\, dx_0\, dy_0,$$

где

$$V_n = \frac{1}{I_n} \begin{cases} e^{\frac{r^2}{r^2 - \eta_n^2}} & \text{при } r < \eta_n, \\ 0 & \text{при } r > \eta_n, \end{cases}$$

а под S_1 и S_2 надо понимать области, ограниченные соответственно неравенствами:

$$(c_1 - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \eta_n^2;$$
$$(x - x_0)^2 + (c_2 - y_0)^2 < \eta_n^2.$$

Чтобы построить последовательность решений уравнения (3), решим задачу Goursat (²) для этого уравнения.

Интересующее нас решение обозначим через $U_n(x, y;\ c_1, c_2)$. Таким образом функция $U_n(x, y;\ c_1, c_2)$ обладает тем свойством, что если $x = c_1$ и $y = c_2$ будут характеристики различных систем, то на этих характеристиках она принимает значения $\psi_n(c_1, y)$ и $\varphi_n(x, c_2)$.

Можно доказать, что последовательность, построенная таким способом, обладает следующими свойствами:

1. Последовательность $U_n(x, y;\ c_1, c_2)$ при определенном подборе постоянных $c_1 = c_1^*$ и $c_2 = c_2^*$ почти везде стремится к вполне определенному пределу, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} U_n(x, y;\ c_1^*, c_2^*) = H(x, y),$$

и при этом

$$[\lim_{n \to \infty} U_n(x, y;\ c_1^*, c_2^*)]_{x=c_1^*} = \overline{U}(c_1^*, y),$$

$$[\lim_{n \to \infty} U_n(x, y;\ c_1^*, c_2^*)]_{y=c_2^*} = \overline{U}(x, c_2^*).$$

2. $U_n(x, y;\ c_1^*, c_2^*)$ стремится к $H(x, y)$ сильно, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \iint_D |U_n(x, y;\ c_1^*, c_2^*) - H(x, y)|\, dx\, dy = 0.$$

Доказательство этих двух свойств основывается на следующей теореме: для любой измеримой совокупности E значений переменного x и почти для всех значений c_2 имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n \to \infty} \int_E U_n(x, c_2)\, dx = \int_E \overline{U}(x, c_2)\, dx,$$

где

$$U_n(x, c_2) = \frac{1}{I_n} \iint_{S_1} \overline{U}(x_0, y_0)\, e^{\frac{r^2}{r^2 - \eta_m^2}}\, dx_0\, dy_0.$$

Следовательно:

$$\iint_G H(x, y)\, L^* V\, dy\, dx = 0.$$

Можно установить, что функции $H(x, y)$ и $\overline{U}(x, y)$ совпадают в области D. С этой целью построим две функции $\underline{H}(x, y)$ и $\underline{H}^*(x, y)$, из которых первая совпадает с $H(x, y)$, а вторая с $\overline{U}(x, y)$ в области $A(x > c_1^*;\ y > c_2^*)$ и уничтожаются вне этой области. Устанавливается также, что функции $\underline{H}(x, y)$ и $\underline{H}^*(x, y)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению в пространстве функционалов. Имеем:

$$L\underline{H}(x, y) = \rho \quad \text{и} \quad L\underline{H}^*(x, y) = \rho\ (^3). \tag{5}$$

Исходя из теоремы С. Л. Соболева о существовании и единственности решения дифференциальных уравнений (5) в пространстве функционалов, при условии уничтожения искомого функционала вне области $A(x > c_1^*, y > c_2^*)$, заключаем, что

$$\underline{H}(x, y) = \underline{H}^*(x, y) \qquad (\text{в } A);$$

отсюда

$$H(x, y) = \overline{U}(x, y) \qquad (\text{в } D).$$

Так как $H(x, y)$ есть предел $U_n(x, y; c_1^*, c_2^*)$, то функция $U(x, y) = H(x, y)$ есть предельное решение уравнения (3), что и требовалось доказать.

Тбилисский математический институт.
Грузинский филиал Академии Наук СССР.

Поступило
17 X 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, IX, ч. 1, 39 (1935). [2] Э. Гурса, Курс математ. анализа, III, ч. 1, стр. 114. [3] С. Соболев, Матем. сб., I (1936).