Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 7

МАТЕМАТИКА

И. Г. ПЕТРОВСКИЙ

О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСЕ РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ АНАЛИТИЧНЫ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 13 X 1937)

В 1903 г. С. Н. Бернштейн [1], решив одну из поставленных Д. Гильбертом в 1900 г. на Международном конгрессе математиков задач, доказал следующее. Все имеющие непрерывные производные до 3-го порядка действительные решения дифференциального уравнения

$$\Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

эллиптического типа, где функция Φ аналитична (голоморфна) по всем ее аргументам, аналитичны по x и y. В 1928 г. эту же теорему доказал H. Lewy [2] в предположении, что u имеет непрерывные частные производные до 4-го порядка. При этом H. Lewy шел методом, совершенно отличным от того, каким пользовался С. Н. Бернштейн. Он свел доказательство аналитичности u по x и y к доказательству возможности построить в пространстве $(x + ix^*, y + iy^*)$ функцию:

$$u(x, x^*, y, y^*) = u_{\text{réel}}(x, x^*, y, y^*) + iu_{\text{imag.}}(x, x^*, y, y^*)$$

таким образом, чтобы она по x и x^*, y и y удовлетворяла уравнениям Коши-Римана и чтобы

$$u_{\text{réel}}(x, 0, y, 0) = u(x, y), \ u_{\text{imag.}}(x, 0, y, 0) = 0.$$

Эту задачу H. Lewy свел к задаче Коши для некоторой гиперболической системы дифференциальных уравнений. Для метода H. Lewy существенно, чтобы рассматриваемое уравнение содержало частные производные только по двум независимым переменным. К другим уравнениям он неприменим.

Я доказал следующую теорему. Пусть дана система

$$F_i(x_0, x_1, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_N; \ldots) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{1}$$

В левых частях не выписаны явно входящие туда частные производные от функций u_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ не выше n_j-го порядка. Мы предполагаем, что в некоторой комплексной по x_0, всем u_j и их производным и действительной по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ области все эти левые части аналитичны по x_0, всем u_j и их производным и имеют непрерывные производные до $\operatorname{Max}\left\{2n+\left[\frac{n+1}{2}\right], n^*\right\}+\left[\frac{n+1}{2}\right]+7$-го * порядка по x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Допустим еще, что при всяких действительных α_k, сумма квадратов которых равна единице, имеет место следующее. Матрица

$$\left\| \sum_{(k)} \frac{\partial F_i}{\partial \left\{ \dfrac{\partial^{k_0+\ldots+k_n} u_j}{\partial x_0^{k_0} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right\}} \alpha_0^{k_0} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \right\|, \tag{2}$$

где $\sum\limits_{(k)}$ означает суммирование по всем целым неотрицательным k_0, $k_1, \ldots, k_n$, сумма которых равна n_j, имеет вид:

$$\left\| \begin{array}{cccc} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_r \end{array} \right\|$$

Здесь все элементы, не попавшие ни в одну из матриц M_s, тождественно равны нулю.

Пусть в левые части всех уравнений системы (1) входят производные от функций $u_j\,(j = N^{(s)}+1,\ N^{(s)}+2, \ldots, N^{(s+1)})$, соответствующих матрице M_s, только по переменным

$$x_{0s} = x_0, x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{ls}.$$

Мы требуем тогда, чтобы детерминант матрицы M_s не обращался в нуль ни при каких действительных значениях $\alpha_{0s} = \alpha_0, \alpha_{1s}, \ldots, \alpha_{ls}$, сумма квадратов которых равна единице. Мы допускаем в частности, что матрица M_s состоит только из одного элемента $\alpha_0^{n_i}$.

При выполнении всех этих условий мы утверждаем, что все решения системы (1), имеющие непрерывные производные по $x_0, x_1, \ldots, x_n$ до $\operatorname{Max}\left\{2n+\left[\frac{n+1}{2}\right], n^*\right\}+\left[\frac{n+1}{2}\right]+n^*+6$-го порядка, аналитичны по x_0. Мы говорим здесь для краткости, что «решение системы (1) аналитично по x_0», вместо того, чтобы говорить, что все функции $u_1, u_2, \ldots, u_N$, составляющие это решение, аналитичны по x_0.

Чтобы доказать это, мы погружаем подобно тому, как это делал H. Lewy, пространство $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ в пространство $(x_0^*, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и определяем в некоторой $(n+2)$-мерной области функции $u_{j\,\text{réel}}$ и $u_{j\,\text{imag.}}\,(j = 1, 2, \ldots, N)$ таким образом, чтобы каждая пара функций $u_{j\,\text{réel}}$ и $u_{j\,\text{imag.}}$ удовлетворяла уравнениям Коши-Римана по x_0 и x_0^* и чтобы функции $u_j = u_{j\,\text{réel}} + i u_{j\,\text{imag.}}$ при $x_0^* = 0$ совпадали с заданными функциями u_j, удовлетворяющими системе (1). Но построение этих функций мы делаем совершенно отличным методом от метода H. Lewy.

* $[x]$ означает целую часть от x, n^* означает $\operatorname{Max}\left\{n_1, n_2, \ldots, n_N\right\}$.

С другой стороны, мы доказываем существование неаналитичных по x_0, но имеющих непрерывные производные каких угодно высоких порядков, решений системы (1), если выполняются следующие условия:

1. Существует такая система действительных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, при которых детерминант матрицы (2) имеет действительный, отличный от нуля корень α_0.

2. Этот детерминант на равен тождественно нулю при всех $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

3. Функции F_i суть линейные функции с постоянными коэффициентами от $u_j\,(j = 1, 2, \ldots, N)$ и всех их производных, а свободные члены аналитичны по $x_0, x_1, \ldots, x_n$. При некоторых особых ограничениях, аналогичных тем, какие делает E. Goursat в приложении II к т. II его книги «Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre», аналогичное утверждение справедливо и для нелинейных систем.

Если при некоторых действительных $\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \ldots, \alpha_{ls}\,(l > 0)$, среди которых есть отличные от нуля, детерминант одной из матриц M_s имеет корень $\alpha_0 = 0$, то вопрос о наличии у системы (1) неаналитических по x_0 решений остается открытым. Можно привести примеры систем, которые при этом условии имеют неаналитические по x_0, но сколько угодно раз дифференцируемые решения. Но можно указать системы такого же типа, имеющие только аналитические по x_0 решения.

Условимся называть *эллиптическими* системы (1), у которых детерминант матрицы (2) ни при каких действительных $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для которых $\sum \alpha_k^2 = 1$, не обращается в нуль. Из сформулированных прежде теорем следует, что все достаточно гладкие решения такой системы аналитичны по $x_0, x_1, \ldots, x_n$, если все функции $F_i\,(i = 1, 2, \ldots, N)$ аналитичны по всем их аргументам. С другой стороны, система (1) обязательно имеет решение, не состоящее из аналитических по всем x_k функций u_j, при следующих условиях:

1. Существует такая система действительных $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не состоящая из одних нулей, которая обращает детерминант матрицы (2) в нуль.

2. Этот детерминант не равен тождественно нулю по $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

3. F_i суть линейные функции от $u_j\,(j = 1, 2, \ldots, N)$ и всех их производных, свободные же члены аналитичны по всем x_k.

Как показывают примеры, условие, чтобы детерминант матрицы (2) не был равен нулю тождественно при всех α_k, здесь существенно.

Эллиптические системы вида (1) с аналитическими левыми частями обладают свойствами, очень похожими на свойства систем Коши-Римана. Решения же их обладают свойствами, очень похожими на свойства аналитических функций. Мы предполагаем посвятить специальный мемуар изучению этих свойств. Сейчас отметим только следующее.

Мы показали, что все достаточно гладкие решения эллиптических аналитических систем аналитичны по $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Отсюда по теореме Ковалевской заключаем, что задача Коши для нормальных систем вида:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \Phi_i\,(t, x_0, x_1, \ldots, x_n;\quad u_1, u_2, \ldots, u_N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

всегда имеет единственное аналитическое по всем x_k решение, если за начальные значения функций u_j при $t = 0$ принять решения какой-нибудь эллиптической аналитической системы и если функции Φ_i аналитичны по всем их аргументам.

Таким образом в отношении задачи Коши для нормальных систем с аналитическими правыми частями свойство начальных данных удовлетворять аналитической эллиптической системе вполне эквивалентно их свойству удовлетворять системе уравнений Коши-Римана по x_k и x_k^* ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Заметим еще, что можно показать следующее. Если начальные данные для двух решений, а также все их производные достаточно высоких порядков, отличаются между собой достаточно мало и если эти начальные данные удовлетворяют одной и той же аналитической эллиптической системе, то и решения задачи Коши для нормальной системы с аналитическими правыми частями отличаются между собой так же достаточно мало на некоторой области пространства $(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)$, прилегающей к тому куску гиперплоскости $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, где заданы начальные данные. Как показал J. Hadamard ([3]), это утверждение может оказаться неверным, если от начальных данных не требовать, чтобы они удовлетворяли одной и той же аналитической эллиптической системе.

Научно-исследовательский институт математики.
Московский государственный университет.

Поступило
13 X 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Math. Annalen, **59**, 20—76. [2] Math. Annalen, **101**, 609—619. [3] J. Hadamard, Problème de Cauchy, 40—41 (1932).