Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 7

МАТЕМАТИКА

В. С. ЛЮКШИН

ОБ ИЗГИБАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 X 1937)

Дана в плоскости (z, r) дуга OA аналитической кривой с кривизной всюду положительной, в точке $O(0, 0)$ касательная пусть образует с осью Oz угол, отличный от нуля, в точке $A(z_0, r_0)$ касательная пусть перпендикулярна к Oz. Поверхность вращения S такой дуги вокруг Oz будет всюду отрицательной кривизны, с особой, конической, точкой с одной стороны и с параболически ограниченным краем с другой.

Рассмотрим семейство таких линий с параметром $a > 0$:

$$r = r(z) = az + \varphi(z), \tag{1}$$

где $r(z)$, как известно, разлагается в точке $z = z_0$ в сходящийся во всем интервале $[0, z_0]$ ряд по дробным степеням $z - z_0$:

$$r - r_0 = \alpha_1 (z_0 - z)^{\frac{1}{m}} + \alpha_2 (z_0 - z)^{\frac{2}{m}} + \ldots, \tag{2}$$

m — целое положительное число; пусть $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) > 0$, $\varphi'(z) > 0$, $\varphi''(z) > 0$; в точке $z = z_0$ $\frac{dz}{dr} = 0$, если $\alpha_1 > 0$.

Мы исследуем методом Cohn-Vossen'a ([1]) бесконечно малое изгибание первого порядка поверхности S в целом, т. е. ищем поверхность S_1 такую, чтобы для всех соответствующих линий поверхностей S_1 и S выполнялось равенство:

$$ds_1^2 - ds^2 = 0, \tag{3}$$

с точностью до бесконечно малого первого порядка параметра изгибания t. Поверхность S_1 представим уравнениями для цилиндрических координат:

$$z_1 = z + tZ(z, \varphi),$$
$$r_1 = r(z) + tR(z, \varphi),$$
$$\varphi_1 = \varphi + tV(z, \varphi),$$

где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Z, R, V — искомые функции. Мы считаем последние периодическими функциями аргумента φ, тогда каждую представим рядом:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_{n1}(z) \cos n\varphi + Z_{n2}(z) \sin n\varphi,$$

аналогично для R и V.

Уравнение (3) заменится системой [см. например нашу работу [2]] из шести уравнений с неизвестными функциями: $Z_{n1}, Z_{n2}, R_{n1}, R_{n2}, V_{n1}, V_{n2}$, которая заменяется системой:

$$\left.\begin{aligned} r' R_n' + Z_n' = 0 \\ (n^2-1)\, r' R_n + r R_n' + n^2 Z_n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и наконец уравнением

$$r R_n'' + (n^2-1)\, r'' R_n = 0, \tag{5}$$

где индексы $n1, n2$ заменены индексом n, концы интервала $z=0, z=z_0$ являются особыми точками дифференциального уравнения. Внутри $[0, z_0]$ мы имеем голоморфные решения. Обычным способом находим, что $z=0$ будет обыкновенной точкой всякого решения уравнения (5). Из двух частных интегралов только первый интеграл

$$R_n(z) = b_0 z g(z), \tag{6}$$

где $g(z)$—голоморфная в окрестности начала функция, $g(0)=1$, $b_0 \neq 0$, удовлетворяет задаче изгибания. Второй интеграл не удовлетворяет по той причине, что тогда функции V_{n2}, V_{n1} при $z \to 0$ будут неограниченно возрастать, что невозможно.

Из системы (4) мы находим, что $Z_n(0)=0$, кроме того $R_n(0)=0$, следовательно точка O при изгибании остается неподвижной.

Для изучения уравнения (5) и его решений в точке $z=z_0$ мы воспользуемся рядом (2), сделаем замену $z_0 - z = y^m$ и уравнение (5) примет вид:

$$r[yQ'' - (m-1)Q'] + (n^2-1)[-(m-1)r_y' + y r_{yy}'']Q = 0, \tag{7}$$

где $Q(y) = R_n(z)$, $r = r_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \dots$

Это уравнение типа Fuchs'а имеет правильные интегралы при $y=0$. Частные интегралы мы ищем в форме $Q(y) = y^c \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k y^k$, $\beta_0 \neq 0$; определяющее уравнение $c(c-m)=0$ позволяет написать два частных интеграла, из которых только один

$$\bar{R}_n(z) = \beta_0 (z_0 - z)\, \bar{g}\left[(z_0-z)^{\frac{1}{m}}\right] \tag{8}$$

может решить задачу изгибания.

Искомое решение должно обращаться в нуль в концах интервала $[0, z_0]$. Совпадение решений (6) и (8) оказывается возможным не при всяком значении параметра a.

Мы преобразуем уравнение (5) к виду Sturm'a-Liouville'я:

$$R_n'' + G(z) R_n = 0, \qquad G(z) = \frac{(n^2-1)\,\varphi''(z)}{az + \varphi(z)}. \tag{9}$$

Функция $G(z) > 0$ и непрерывна внутри $[0, z_0]$, в концах интервала имеет полюсы вида:

$$G(z) = \frac{1}{z} f_1(z), \quad G(z) = \frac{1}{(z_0-z)^{\frac{2m-1}{m}}}\varphi_1(z),$$

где $f_1(0) \neq 0$, $\varphi_1(z_0) \neq 0$. Имеют место теоремы Sturm'a [3]: 1) теорема о разделении нулей; 2) теорема колебания решений обобщается на случай уравнения с особыми точками при $z=0$, $z=z_0$, надо только предположить, что решение, например при $z=z_0$, имеет вид (8);

вместо изменения $G(z)$ надо говорить об изменении $f_1(z)$ или $\varphi_1(z)$; 3) решение и его производная суть непрерывные функции z и параметра a; нули решения—непрерывные функции параметра a.

Сравнив уравнение (9) с уравнением $S'' + \lambda^2 S = 0$, где $\lambda = \text{const}$, мы найдем, что решения (6) и (8) имеют сколько угодно нулей в интервале $[0, z_0]$, ибо, увеличивая n, можно сделать $G(z) > \lambda^2$ во всем $[0, z_0]$. Выбрав некоторое n, мы увеличиваем a и в силу теорем Sturm'a получаем, что нули $\bar{R}_n(z)$ перемещаются влево, а нули $R_n(z)$—вправо.

Для всякого $n > 1$ существует ряд характеристических чисел $a = a^{(1)} < a^{(2)} < \ldots < a^{(k)}$, при которых крайний правый нуль $R_n(z)$ при перемещении пройдет через точку $z = z_0$. Мы получаем теорему: «среди семейства линий (1) существует счетное множество таких, к которым касательные в начале имеют угловые коэффициенты $a^{(1)} < a^{(2)} < \ldots$ и т. д., и поверхность вращения каждой такой линии с конической точкой с одной стороны и с параболическим краем с другой допускает бесконечно малое изгибание первого порядка. Особая точка остается неподвижной и не перестает быть особой (конической); краевая окружность переходит в некоторую линию на цилиндре, проходящем через эту окружность, с образующими, параллельными оси вращения».

Поступило
10 X 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Cohn-Vossen, Math. Annalen, **102** (1929). [2] В. С. Люкшин, Математический сборник, **2 (44)**, вып. 3 (1937). [3] M. Bôcher, Leçons sur les méthodes de Sturm (1917).