Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 7

МАТЕМАТИКА

Н. ЧУДАКОВ

О ПРОБЛЕМЕ ГОЛЬДБАХА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 21 X 1937)

Назовем «иррегулярным» то четное число, которое не может быть представлено как сумма двух простых.

Пусть $\nu(x)$ — число «иррегулярных» четных чисел $\leqslant x$. В этой работе доказывается, что

$$\nu(x) = O\left(\frac{x}{(\lg x)^A}\right),$$

где A — любое положительное число.

Доказательство. Эту теорему достаточно доказать для таких «иррегулярных» чисел, для которых

$$T(n) \leqslant (\lg x)^{A+1}, \quad (A > 1), \tag{1}$$

где $T(n)$—число делителей n.

В самом деле, число всех чисел $\leqslant x$, для которых не соблюдено условие (1), есть величина порядка $O\left(\frac{x}{(\lg x)^A}\right)$.

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} S &= \sum_{p\leqslant x} e^{2\pi i p\alpha}; \ \psi_{a,q} = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{n=2}^{x} \frac{e^{2\pi i n\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)}}{\lg n}; \\ S^2 &= \sum_{n\leqslant 2x} a_n e^{2\pi i n\alpha}; \ F = \sum_{q\leqslant (\lg x)^{2A}} \psi_{aq}^2 = \sum_{n=q}^{2x} b_n e^{2\pi i n\alpha}; \\ b_n &= \gamma_n \sum_{q\leqslant (\lg x)^{2A}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,q)=1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} n}; \ \gamma_n = \sum_{n'+n''=n} \frac{1}{\lg n' \lg n''}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Легко убедиться, что

$$\gamma_n > c_1 \frac{n}{\lg^2 n}. \tag{3}$$

Далее, повторяя известные рассуждения [1], убеждаемся в том, что если соблюдено условие (1), то

$$\left| \sum_{q\leqslant (\lg x)^{2A}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,q)=1} e^{-2\pi i \frac{a}{q} n} \right| > c_2 > 0 \tag{4}$$

для $n > c_3$.

Выражения (3) и (4) дают:

$$\left| b_n \right| > c_4 \frac{n}{(\lg n)^2} \tag{5}$$

при $n > c_3$.

Далее разделим интервал (0,1) на части, приняв за точки деления медианты ряда Farey'a:

$$\frac{a}{q};\ (a, q) = 1;\ q \leqslant x (\lg x)^{-4A}. \tag{6}$$

Пусть C_{aq}—тот интервал, внутри которого лежит точка $\frac{a}{q}$.

1. Опираясь на известный результат Siegel'я (2), легко доказать, что

$$\sum_{\substack{q \leqslant (\lg x)^{4A} \\ (a,q)=1}} \int\limits_{C_{aq}} \left| s^2 - \psi_{aq}^2 \right|^2 d\alpha \ll \frac{x^3}{(\lg x)^A}. \tag{7}$$

В остальных интервалах C_{aq} действует известная теорема Виноградова (3).

Следовательно:

$$\sum_{\substack{q > (\lg x)^{4A} \\ (a,q)=1}} \int\limits_{C_{aq}} \left| s \right|^4 d\alpha \ll x^2 \left(\lg x \right)^{-A+1} \int\limits_0^1 \left| s \right|^2 d\alpha \ll x^3 (\lg x)^{-A}. \tag{8}$$

Далее, так как длина C_{aq} меньше $(xq)^{-1} (\lg x)^{4A}$, то

$$\sum_{\substack{q > (\lg x)^{4A} \\ (a,q)=1}} \int\limits_{C_{aq}} \left| \psi_{aq} \right|^4 d\alpha \ll \sum_{\substack{q > (\lg x)^{4A} \\ (a,q)=1}} \frac{(\lg x)^{4A}}{xq} \frac{1}{\varphi^4(q)} \frac{x^4}{(\lg x)^4} \ll$$

$$\ll (\lg x)^{4A} x^3 \sum_{q > (\lg x)^{4A}} \frac{1}{q^4} \ll x^3 (\lg x)^{-A}. \tag{9}$$

Выражения (8) и (9) дают:

$$\sum_{\substack{q > (\lg x)^{4A} \\ (a,q)=1}} \int\limits_{C_{aq}} \left| s^2 - \psi_{aq}^2 \right|^2 d\alpha \ll \sum_{q > (\lg x)^{4A}} \int\limits_{C_{aq}} \left\{ \left| s \right|^4 + \left| \psi_{aq} \right|^4 \right\} d\alpha \ll$$

$$\ll x^3 (\lg x)^{-A}. \tag{10}$$

Выражения (7) и (10) дают:

$$\sum_{C_{aq}} \int\limits_{C_{aq}} \left| s^2 - \psi_{aq}^2 \right|^2 d\alpha \ll x^3 (\lg x)^{-A}. \tag{11}$$

2. Далее очевидно, что

$$\sum_{C_{aq}} \int\limits_{C_{aq}} \left| F - \psi_{aq}^2 \right|^2 d\alpha \ll (\lg x)^{4A} \sum_{C_{aq}} \sum_{(a',q')}{}' \int\limits_{C_{aq}} \left| \psi_{a'q'} \right|^4 d\alpha +$$

$$+ \sum_{q > (\lg x)^{2A}} \int\limits_{C_{aq}} \left| \psi_{aq} \right|^4 d\alpha \tag{12}$$

(знак $'$ указывает, что слагаемое $\left| \psi_{aq} \right|^4$ опущено).

Но

$$\sum_{C_{aq}} \sum_{a'q'} \int_{C_{aq}} \left| \psi_{a'q'} \right|^4 d\alpha \ll \sum_{aqa'q'} \frac{q^4 q'^4}{\varphi^4(q')(aq'-a'q)^4} \frac{(\lg x)^{4A}}{qx}.$$

Так как при заданном s уравнение

$$s = aq' - a'q$$

имеет не более, чем

$$\ll (\lg x)^{4A} \frac{x}{(\lg x)^{4A}} \ll x,$$

решений, то

$$\sum_{C_{aq}} \sum_{a'q'} \int_{C_{aq}} \left| \psi_{a'q'} \right|^4 d\alpha \ll \frac{x^3 (\lg\lg x)^4}{(\lg x)^{8A}}. \tag{13}$$

Далее:

$$\sum_{\substack{q > (\lg x)^{2A} \\ (a,q)=1}} \int_{C_{aq}} \left| \psi_{aq} \right|^4 d\alpha \ll \sum_{\substack{q > (\lg x)^{2A} \\ (a,q)=1}} \frac{1}{\varphi^4(q)} \frac{x^3 (\lg x)^{4A}}{(\lg x)^4 q} \ll$$

$$\ll x^3 (\lg x)^{4A} \sum_{q > (\lg x)^{2A}} \frac{1}{q^4} \ll x^3 (\lg x)^{-2A}. \tag{14}$$

Выражения (12), (13), (14) дают:

$$\sum_{C_{aq}} \int_{C_{aq}} \left| F - \psi_{aq}^2 \right|^2 d\alpha \ll x^3 (\lg x)^{-A}. \tag{15}$$

Выражения (11) и (15) дают:

$$\int_0^1 \left| s^2 - F \right|^2 d\alpha \ll x^3 (\lg x)^{-2A}. \tag{16}$$

Но

$$\int_0^1 \left| s^2 - F \right|^2 d\alpha = \sum_{n \leqslant x} \left| a_n - b_n \right|^2.$$

Для «иррегулярных» четных чисел $a_n = 0$; следовательно

$$\sum_{(\mu)} \left| b_\mu \right|^2 \ll x^3 (\lg x)^{-A}, \tag{17}$$

где μ пробегает все те «иррегулярные» числа интервала $\left(\frac{x}{2}, x \right)$, которые удовлетворяют условию (1).

Выражения (17) и (5) дают:

$$N c_4 \frac{x^2}{(\lg x)^4} \ll x^3 (\lg x)^{-A}, \text{ т. е. } N \ll x (\lg x)^{-A+4}, \tag{18}$$

где N — число значений μ.

Повторяя аналогичные рассуждения для интервалов

$$\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{4}\right); \left(\frac{x}{4}; \frac{x}{8}\right), \ldots, \left(\frac{x}{2^p}; \sqrt{x}\right),$$

$$2^p \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2^{p+1},$$

мы убеждаемся, что число всех «иррегулярных» чисел в интервале $(1, x)$ не больше

$$\ll \sqrt{x} + x(\lg x)^{-A+5} \ll x(\lg x)^{-A+5}, \tag{19}$$

что доказывает нашу теорему.

Таким образом почти все четные числа регулярны.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
21 X 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Landau, Vorlesungen, Bd. I, S. 226. [2] A. Walfisz, M. Z., **40** (1936), [3] Н. Виноградов, Матем. сб., **2 (44)**, № 2.