Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 2

ГЕОФИЗИКА

Н. МИГАЛЬ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОРИЕНТИРОВКИ ЭЛЛИПСОИДА ИНЕРЦИИ ЗЕМЛИ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 5 III 1939)

Пусть A, B, C, F, G, H — моменты инерции и произведения инерции Земли, отнесенные к системе координат $Oxyz$. Уравнение эллипсоида инерции в данной системе имеет вид:

$$Ax^2+By^2+Cz^2-2Fyz-2Gzx-2Hxy=1. \tag{1}$$

Коэффициенты при квадратах координат преобразованной квадратичной формы (1) к главным осям суть корни уравнения:

$$\begin{vmatrix} A-\lambda, & -H, & -G \\ -H, & B-\lambda, & -F \\ -G, & -F, & C-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Или, раскрывая определитель,

$$-\lambda^3+m\lambda^2+n\lambda+q=0, \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} m&=A+B+C \\ n&=F^2+G^2+H^2-(AC+BC+AB) \\ q&=ABC-AF^2-CH^2-BG^2-2FGH \end{aligned}\right\}. \tag{3'}$$

Подстановкой

$$\lambda=y+\frac{m}{3} \tag{4}$$

уравнение (3) приводится к виду:

$$y^3+ay+b=0, \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a&=-\left(n+\frac{1}{3}m^2\right) \\ b&=-\left(\frac{2}{27}m^3+\frac{1}{3}mn+q\right) \end{aligned}\right\}. \tag{5'}$$

Сделав простые преобразования, связанные с применением формул (3′) и (5′), получим:

$$\left.\begin{aligned} a&=-(H^2+F^2+G^2)-\frac{1}{3}[(C-A)^2+(A-B)(C-B)] \\ b&=-\frac{2}{27}[(A-B)-(B-C)]^3-\frac{1}{3}[(A-B)-(B-C)][H^2+G^2+F^2+ \\ &\quad+(A-B)(B-C)]+(A-B)F^2+(C-B)H^2+2FGH \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Входящие в эту формулу разности между A, B и C и коэффициенты F, G, H определяются по гравиметрическим данным (1) (формулы, определяющие F, G, H, приведены в конце настоящей заметки). Следовательно корни уравнения (5), а стало быть и разности корней уравнения (3), т. е. разности главных моментов инерции Земли, можно определить по наблюдениям силы тяжести.

Приступим теперь к исследованиям, связанным с определением ориентировки эллипсоида инерции Земли.

Пусть α, β, γ — направляющие косинусы (в системе $Oxyz$) любой из осей эллипсоида инерции. Тогда, как известно,

$$\begin{aligned} (A-\lambda)\,\alpha - H\beta - G\gamma &= 0, \\ -H\alpha + (B-\lambda)\,\beta - F\gamma &= 0, \\ -G\alpha - F\beta + (C-\lambda)\,\gamma &= 0, \end{aligned}$$

или, принимая во внимание (4) и (3'),

$$\left.\begin{array}{lll} \left\{\frac{1}{3}[(A-B)+(A-C)]-y\right\}\alpha & -H\beta & -G\gamma=0 \\ -H\alpha+\left\{\frac{1}{3}[(B-A)+(B-C)]-y\right\}\beta & & -F\gamma=0 \\ -G\alpha & -F\beta+\left\{\frac{1}{3}[(C-A)+(C-B)]-y\right\}\gamma=0 & \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Таким образом система уравнений (7) вместе с уравнением $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ дает направляющие косинусы осей эллипсоида инерции Земли, если известны разности между A, B и C и коэффициенты F, G, H.

Способом, изложенным в нашей статье (1), можно получить формулы, определяющие F, G, H. Мы их выпишем без вывода

$$H=\frac{\Delta J_3}{4\pi f}, \tag{8}$$

где

$$\Delta J_3 = a^2\int_\Sigma (g-\gamma)\,N(\theta,\lambda)\,d\sigma + a^2\left(2+\frac{9}{14}q-\frac{5}{7}\alpha\right)\int_\Sigma \Delta g\,\sin^2\theta\,\sin 2\lambda\,d\sigma -$$

$$- a^2\left(\frac{5}{3}q-\frac{4}{3}\alpha\right)\int_\Sigma \Delta g\,\sin^4\theta\,\sin 2\lambda\,d\sigma,$$

$$N(\theta,\lambda)=\left(\frac{1}{2}-\alpha\cos^2\theta\right)\sin^2\theta\,\sin 2\lambda.$$

$$G=\frac{\Delta J_4}{4\pi f}, \tag{9}$$

где

$$\Delta J_4 = a^2\int_\Sigma (g-\gamma)\,M(\theta,\lambda)\,d\sigma + a^2\left(2-\frac{1}{14}q-\frac{1}{7}\alpha\right)\int_\Sigma \Delta g\,\sin^2\theta\,\sin 2\lambda\,d\sigma +$$

$$+ a^2\left(\frac{5}{3}q-\frac{4}{3}\alpha\right)\int_\Sigma \Delta g\,\sin^4\theta\,\sin 2\lambda\,\sin^2\lambda\,d\sigma,$$

$$M(\theta,\lambda)=\left(\frac{1}{2}-\alpha\sin^2\theta\,\sin^2\lambda\right)\sin^2\theta\,\sin 2\lambda.$$

В этой последней формуле приняты обозначения: полярная ось направлена по оси Oy; θ — полярное расстояние точки A, имеющей текущие координаты; λ — угол между плоскостью экватора и плоскостью меридиана, отсчитываемый от положительной оси Ox против часовой стрелки. Для определения F служит формула (9), если полярную ось направить по оси Ox. В (8) и (9) принято во внимание, что F', G' и H' для уровенного эллипсоида равны нулю.

Гравиметрическая обсерватория.
Академия Наук УССР.
Полтава.

Поступило
5 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 Н. Мигаль, ДАН, XIX, № 9 (1938).