Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 6

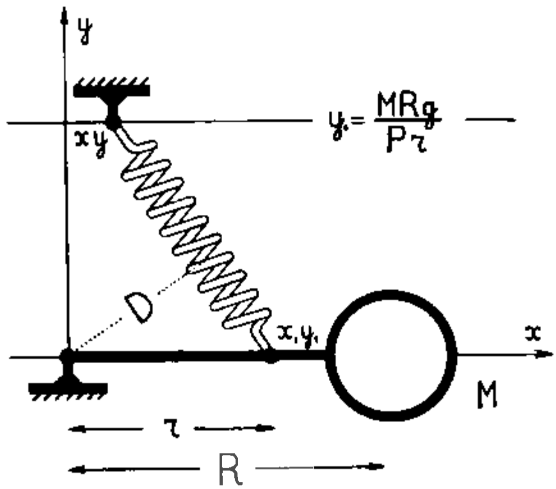
ГЕОФИЗИКА

Г. Л. ШНИРМАН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПРУЖИННОГО ПОДВЕСА ВЕРТИКАЛЬНОГО СЕЙСМОГРАФА

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 1 X 1937)

Рассмотрим простейший вертикальный сейсмограф (фиг. 1), состоящий из массы, подвешенной на цилиндрической спиральной пружине и имеющей горизонтально расположенную ось вращения. Его параметры: M — масса; R — расстояние от оси вращения до центра тяжести; r — расстояние от точки закрепления нижнего конца пружины на стержне маятника до оси вращения. Пружину считаем невесомой.



Фиг. 1.

Положение точки прикрепления верхнего конца пружины к штативу пока оставляем неопределенным. Кроме того полагаем, что 1) центр тяжести маятника, точка прикрепления пружины к стержню и ось вращения лежат в одной плоскости, 2) пружина соединяется с маятником и штативом через шарниры, 3) ось вращения и шарниры подвеса пружины не создают при качаниях маятника моментов упругих сил, 4) силы трения в нашей системе отсутствуют.

Совмещаем начало прямоугольной системы координат xy с осью вращения нашего сейсмографа так, чтобы ось y расположилась вертикально, а ось x совпала с плоскостью качания маятника. В этом случае при любых положениях маятника между координатами x_1, y_1 точки прикрепления нижнего конца пружины к маятнику и расстоянием r этой точки от оси вращения маятника существует простое соотношение:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \tag{1}$$

или, если принять горизонтальное положение маятника за исходное, то

$$x_1 = r\cos\Theta \text{ и } y_1 = r\sin\Theta, \tag{2}$$

где Θ — есть угол поворота маятника.

Если через P обозначить жесткость пружины, через A ее начальную длину при отсутствии деформирующей силы и через z ее полную длину в деформированном виде, то сила, развиваемая такой деформированной пружиной, равна:

$$f = P(z - A). \tag{3}$$

Полная длина z пружины при любых углах поворота маятника может быть определена как расстояние между точками с координатами x_1, y_1 и x, y:

$$z = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}. \tag{4}$$

Таким образом сила, развиваемая растянутой пружиной, равна

$$f = P\left[\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} - A\right]. \tag{5}$$

Сила приложена к плечу D (фиг. 1), равному расстоянию между осью пружины (линией, соединяющей точки прикрепления пружины) и началом координат. Это расстояние (определяемое аналитически) равно:

$$D = \frac{x_1 y - y_1 x}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}. \tag{6}$$

Из полученных выражений (5) и (6) определяем момент упругой силы пружины вокруг оси вращения маятника:

$$\mathfrak{M}_1 = fD = P(x_1 y - y_1 x)\left[1 - \frac{A}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}}\right]. \tag{7}$$

Подставляем в полученное выражение значения x_1 и y_1 из (2) и упрощаем подкоренное выражение:

$$\mathfrak{M}_1 = Pr(y\cos\Theta - x\sin\Theta)\left[1 - \frac{A}{\sqrt{r^2 + x^2 + y^2 - 2r(x\cos\Theta + y\sin\Theta)}}\right]. \tag{8}$$

Прежде чем перейти к дальнейшему развитию формулы (8), остановимся на одном чрезвычайно интересном частном случае, который позволит внести значительную ясность в состояние вопроса.

Полагаем в формуле (8) $A = 0$.

Физический смысл этого условия заключается в том, что длина недеформированной пружины равна нулю, т. е. что при отсутствии растягивающей силы концы пружины совместились бы в одной точке, если бы соседние витки пружины, опирающиеся друг на друга при смыкании последней, этому не препятствовали.

Таким образом имеем:

$$\mathfrak{M}_{10} = Pr(y\cos\Theta - x\sin\Theta). \tag{9}$$

Момент силы тяжести, действующей на наш маятник, равен

$$\mathfrak{M}_2 = -MRg\cos\Theta. \tag{10}$$

Для нормальной работы вертикального сейсмографа необходимо, чтобы при равновесии маятника центр тяжести его находился в одной горизонтальной плоскости с осью вращения. Таким образом требуется, чтобы при $\Theta = 0$ момент упругой силы пружины уравновешивал бы момент силы тяжести, т. е.

$$\mathfrak{M}_{10} + \mathfrak{M}_2 = 0. \tag{11}$$

Суммируем (9) и (10), подставив в них $\Theta = 0$, и приравниваем нулю сумму, откуда получаем:

$$y_0 = \frac{MRg}{Pr}. \tag{12}$$

Таким образом в случае маятника с нулевой начальной длиной пружины ($A = 0$) и заданными значениями параметров P, r, M и R горизонтальное положение статического равновесия достигается маятником только при условии (12), т. е. при расположении верхней точки подвеса пружины в любой точке прямой (фиг. 1), параллельной оси x (т. е. горизонтальной) и определяемой уравнением (12).

При изменении какого-либо из параметров сейсмографа естественно, что изменится и высота нашей прямой над осью x.

В последующих наших рассуждениях полагаем, что сейсмограф работает нормально, т. е. что выполнено условие (12).

Подставляем (12) в (9), складываем с (10) и сокращаем

$$\mathfrak{M}_{10} + \mathfrak{M}_2 = -Prx \sin \Theta. \tag{13}$$

Пишем уравнение движения нашего сейсмографа в случае отсутствия внешних сил и сил трения

$$K\Theta + Prx \sin \Theta = 0, \tag{14}$$

где K — момент инерции маятника вокруг оси вращения.

Считая угловые отклонения маятника малыми, заменяем $\sin \Theta$ на Θ и преобразуем:

$$\ddot{\Theta} + \frac{Prx}{K}\Theta = 0. \tag{15}$$

На основании уравнения (15) период собственных колебаний маятника будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{Prx}}. \tag{16}$$

Полученная формула в чрезвычайно простом виде выражает зависимость между периодом собственных колебаний маятника, его параметрами и абсциссой точки прикрепления верхнего конца пружины к штативу. При приближении точки прикрепления верхнего конца пружины к оси y период собственных колебаний маятника возрастает, доходя при $x = 0$ до бесконечности *.

Переходим к вопросу о смещении нуль-пункта маятника и об изменении его периода, происходящем вследствие температурного изменения жесткости пружины. Этот весьма существенный для вертикального сейсмографа вопрос в случае сейсмографа с нулевой начальной длиной пружины представляется возможным разрешить в сравнительно простой форме.

Предположим, что вследствие температурного изменения жесткости пружины на величину ΔP маятник сместился от исходного горизонтального положения на угол φ. Если принять это новое положение маятника за исходное и углы поворота отсчитывать от него, то путем ряда преобразований выведенных выше формул нетрудно получить следующие зависимости между изменением жесткости пружины (ΔP), углом смещения маятника (φ) и первоначальным (T_0) и новым (T_1) периодом собственных колебаний маятника:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2 l} \cdot \frac{\Delta P}{P + \Delta P}, \tag{17}$$

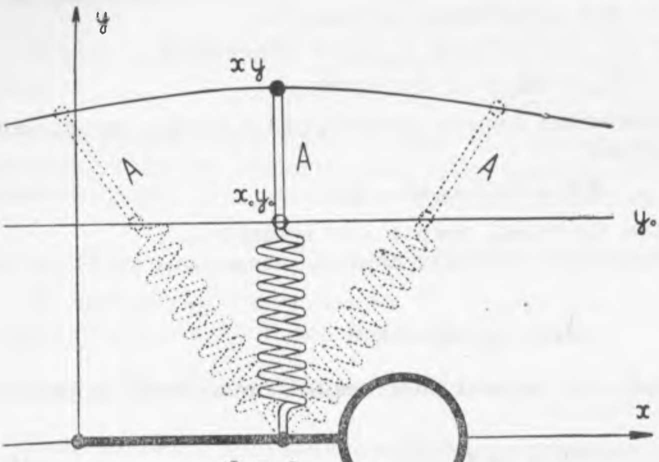
$$T_1 = T_0 \sqrt{\cos \varphi - \frac{4\pi^2 l}{T_0^2 g} \sin \varphi}, \tag{18}$$

$$T_1 = T_0 \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{(P + \Delta P)^2}{P^2} + \frac{T_0^4 g^2}{16\pi^4 l^2} \cdot \frac{(\Delta P)^2}{P^2}}}. \tag{19}$$

Возвратимся к общему случаю маятника с пружиной произвольной начальной длины. Такую пружину можно себе представить в виде пружины с нулевой начальной длиной, соединенной с удлинительным

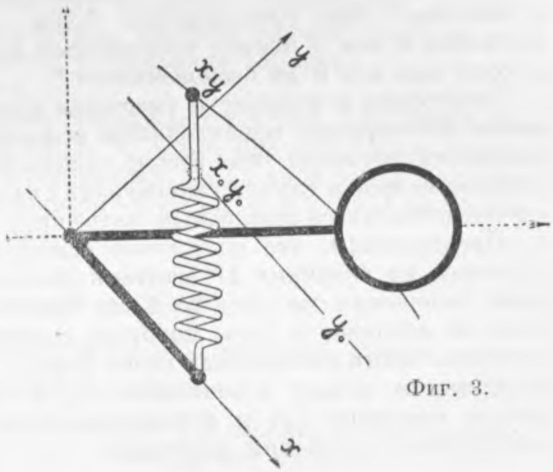
* Совершенно аналогичный результат в частном случае $x = 0$ получился у Lucien La Coste (A New Type Long Period Vertical Seismograph, Physics, July 1934, vol. 5, № 7, p. 178—180).

стержнем, длина которого равна начальной длине нашей пружины. Если бы пружина не имела начальной длины, то ее верхний конец мог бы перемещаться по прямой y_0 (фиг. 2), не нарушая при этом положения статического равновесия. В нашем же случае пружина с нулевой начальной длиной сверху наращена нерастяжимым стержнем A и естественно, что для достижения горизонтального положения статического равновесия верхняя точка пружины с нулевой начальной длиной **не должна сходить** с прямой y_0, верхняя же точка подвеса (верхний конец стержня A) при этом переместится на величину A по направлению от нижней точки подвеса пружины. Траектория этой точки при $x = r$ находится на расстоянии A от прямой y_0 и асимптотически приближается к ней при перемещении x в плюс и минус бесконечность.



Фиг. 2.

Получение выражения для периода собственных колебаний маятника в этом случае сопряжено со значительными трудностями. Задача сильно упрощается, если вместо параметров x и y (координаты верхней точки подвеса пружины) принять за основные x_0 и y_0 (координаты верхней точки воображаемой пружины с нулевой начальной длиной). В этом случае получается хотя и несколько громоздкая, но вполне исчерпывающая зависимость:



Фиг. 3.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{Pr\left\{x_0 - \frac{r}{\left(1 + \frac{1}{A}\sqrt{(r-x_0)^2 + y_0^2}\right)\left[1 + \frac{y_0^2}{(r-x_0)^2}\right]}\right\}}}, \qquad (20)$$

где y_0 определяется формулой (12).

Все приведенные выше рассуждения, как это нетрудно показать, справедливы не только для случая расположения оси вращения маятника, центра его тяжести и точки прикрепления к нему пружины в одной плоскости. Они будут справедливы для любого положения точки прикрепления пружины к маятнику; при этом лишь придется повернуть нашу прямоугольную систему координат так, чтобы ось x прошла через точку прикрепления пружины к маятнику (фиг. 3).

Сейсмологический институт.
Академия Наук СССР. Москва.

Поступило
22 IX 1937.