Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 6

ФИЗИКА

Н. А. ВАСМУТ

К ТЕОРИИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 13 X 1937)

Цель настоящей заметки — введение начального (для $t = 0$) распределения системы с n степенями свободы, совершающей малые колебания. В отличие от ранее изложенного случая «изолированной системы» [IV] ([1]), рассматриваемая система подвержена действию «внешних сил» Q_r. Все «внешние силы» даны в виде гармонических функций времени $Q_r = D_r e^{i\varepsilon t}$.

§ 1. Предположим, что функция распределения для системы, подверженной действию «внешних сил» Q_r, в пределе (при $t \to \infty$) имеет вид Максвелла-Больцмана:

$$f(v_1, \ldots, v_n, x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^n \omega_1 \ldots \omega_n e^{-a\sum\limits_r^n [(v_r - v_r')^2 + \omega_r^2 (x_r - x_r')^2]}, \tag{1}$$

где v_r' и x_r' — значения скоростей и координат при вынужденном силами Q_r движении.

С f вида (1) образуем функцию Φ [I (6)]:

$$\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int e^{-\sum\limits_r^n (\lambda_r v_r + \mu_r x_r)} f\, dv_1 \ldots dv_n\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{2}$$

получаем:

$$\Phi = e^{\sum\limits_r^n \left[\frac{\lambda_r^2}{4a} + \frac{\mu_r^2}{4a\omega_r^2} - \lambda_r v_r' - \mu_r x_r'\right]},$$

$$z = \log \Phi = \sum_{r=1}^n \left[\frac{\lambda_r^2}{4a} + \frac{\mu_r^2}{4a\omega_r^2} - \lambda_r v_r' - \mu_r x_r'\right]. \tag{3}$$

Взяв z вида (3), из уравнения [I (12)] находим:

$$\chi_3(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{2a} \sum_{r, s}^n b_{rs} \lambda_r \lambda_s. \tag{4}$$

Функция χ для системы, подверженной действию внешних сил Q_r, имеет тот же вид, что и для «изолированной системы» [IV (10)]. Следовательно предположение о виде предельного распределения (1) справедливо.

§ 2. С этим χ (4) образуем функцию [I (14)]:

$$z = \frac{1}{2a}\sum_{r,s}^{n} b_{rs}\int_0^t \lambda_r\lambda_s\,dt - \sum_r^n\int_0^t \lambda_r Q_r\,dt + F(A_1, \ldots, A_{2n}), \tag{5}$$

где F есть произвольная функция аргументов A_r.

Так как $\lambda_r(t)$ известны, а систематические силы заданы, имеем:

$$\int_0^t \lambda_r Q_r\,dt = D_r\sum_{\alpha=1}^{2n} a^{r\alpha} A_\alpha\left[\frac{e^{(i\varepsilon-\nu_\alpha)t}-1}{i\varepsilon-\nu_\alpha}\right]. \tag{6}$$

Заменим в (6) A_α их выражением [IV (4)], подставим в выражение z (5) вычисленные значения квадратур [IV (14)], (6) и положим:

$$\lambda_r = \xi_r,\quad \mu_r = \xi_{r+n} \qquad (r = 1, \ldots, n),$$

получаем

$$z = \frac{1}{2a}\sum_{r,s}^{n}\sum_{\alpha,\beta}^{2n}\sum_{i,j}^{2n} b_{rs}a^{r\alpha}a^{s\beta}a_{i\alpha}a_{j\beta}\left[\frac{e^{(\nu_\alpha+\nu_\beta)t}-1}{\nu_\alpha+\nu_\beta}\right]\xi_i\xi_j -$$
$$-\sum_r^n\sum_\alpha^{2n}\sum_k^{2n} D_r a^{r\alpha}a_{k\alpha}\left[\frac{e^{i\varepsilon t}-e^{\nu_\alpha t}}{i\varepsilon-\nu_\alpha}\right]\xi_k + F(A_1, \ldots, A_{2n}). \tag{7}$$

Далее, положим $v_r = y_r$, $x_r = y_{r+n}$ $(r = 1, \ldots, n)$ и заменим в [I (6)] λ_r и μ_r их выражением [IV (12)]; тогда из [I (6)] и (5) и при $t = 0$ следует:

$$F(A_1, \ldots, A_{2n}) = \lg\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int e^{-\sum\limits_{r,\alpha}^{2n} a^{r\alpha}A_\alpha y_r} f(y_1, \ldots, y_{2n}, 0)\,dy_1\ldots dy_{2n}. \tag{8}$$

Выражение F (8) подставим в (7) и, так как $e^z = \Phi$, получаем:

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{2n}, t) =$$
$$= e^{\sum\limits_{ij}^{2n} N_{ij}\xi_i\xi_j - \sum\limits_k^{2n} P_k\xi_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int e^{-\sum\limits_r^{2n} d_r y_r} f(y_1, \ldots, y_{2n}, 0)\,dy_1\ldots dy_{2n}, \tag{9}$$

где

$$N_{ij} = \frac{1}{2a}\sum_{r,s}^{n}\sum_{\alpha,\beta}^{2n} b_{rs}a^{r\alpha}a^{s\beta}a_{i\alpha}a_{j\beta}\left[\frac{e^{(\nu_\alpha+\nu_\beta)t}-1}{\nu_\alpha+\nu_\beta}\right],$$

$$P_k = \sum_r^n\sum_\alpha^{2n} D_r a^{r\alpha}a_{k\alpha}\left[\frac{e^{i\varepsilon t}-e^{\nu_\alpha t}}{i\varepsilon-\nu_\alpha}\right],\quad d_r = \sum_\alpha^{2n} a^{r\alpha}A_\alpha. \tag{10}$$

С Φ вида (9), заменив в (9) y на y', образуем функцию распределения f:

$$f(y_1, \ldots, y_{2n}, t) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^{2n}} I\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int e^{-\sum\limits_r^{2n} d_r y'_r} f(y'_1, \ldots, y'_{2n}, 0)\,dy'_1\ldots dy'_{2n}, \tag{11}$$

где

$$I = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \cdots \int e^{\sum\limits_{ij}^{2n} N_{ij}\xi_i\xi_j + \sum\limits_i^{2n} M_i\xi_i} d\xi_1 \ldots d\xi_{2n}, \quad M_i = y_i - P_i. \tag{12}$$

§ 3. Коэффициенты N_{ij} и M_i показателя подинтегральной функции (12) — комплексные, ξ_i — чисто мнимые. Для вычисления интеграла (12) положим:

$$N_{ij} = p_{ij} + iq_{ij}, \quad M_i = y_i - h_i + il_i, \quad \xi_i = i\eta_i, \tag{13}$$

тогда показатель подинтегральной функции примет вид:

$$-\sum_{ij}^{2n} (p_{ij}\eta_i\eta_j + iq_{ij}\eta_i\eta_j) - \sum_i^{2n} [l_i\eta_i + i(h_i - y_i)\eta_i]. \tag{14}$$

Обозначим первую и вторую действительные квадратичные формы выражения (14) соответственно φ_1 и φ_2. Ортогональным преобразованием $\eta_i = \sum\limits_j^{2n} c_{ij}\vartheta_j$ форму φ_1 приведем к виду $\varphi_1' = \sum\limits_k^{2n} \delta_k \vartheta_k^2$; δ_k найдем из уравнения

$$|p_{ij} - \delta_{ij}| = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, 2n), \tag{15}$$

$$i \neq j, \quad p_{ij} - \delta_{ij} = p_{ij}, \quad i = j, \quad p_{ij} - \delta_{ij} = p_{ij} - \delta,$$

а коэффициенты c_{ij} — из соответствующей линейной системы. Подстановкой $\vartheta_i = \frac{1}{\sqrt{\delta_i}}\zeta_i$ форму φ_1' приведем к единичной. Форма $\varphi_2(\eta)$ перейдет в форму $\varphi_2''(\zeta)$. Далее, ортогональным преобразованием $\zeta_j = \sum\limits_k^{2n} m_{jk}u_k$ форму φ_2'' приведем к каноническому виду $\varphi_2 = \sum\limits_r^{2n} \gamma_r u_r^2$; γ_r найдем из уравнения:

$$|q_{ij} - \gamma p_{ij}| = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, 2n), \tag{16}$$

а коэффициенты m_{jk} — из соответствующей системы уравнений. Линейные формы ψ_1 и ψ_2 выражения (14) получат соответственно коэффициенты:

$$g_r = \sum_{ij}^{2n} \frac{l_i}{\sqrt{\delta_j}} c_{ij} m_{jr}, \quad k_r = \sum_{ij}^{2n} \frac{(h_i - y_i)}{\sqrt{\delta_j}} c_{ij} m_{jr}. \tag{17}$$

Интеграл (12) в новых переменных примет вид:

$$I = (i)^{2n} J \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{-\sum\limits_r^{2n} [(1 + i\gamma_r) u_r^2 + (g_r + ik_r) u_r]} du_1 \ldots du_{2n}, \tag{18}$$

где J — якобиан преобразования:

$$J = \left| \sum_s^{2n} \frac{c_{is} m_{sj}}{\sqrt{\delta_s}} \right| \qquad (i, j = 1, \ldots, 2n). \tag{19}$$

Подстановкой

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{1 + i\gamma_r}} z_r - \frac{g_r + ik_r}{2(1 + i\gamma_r)}$$

приведем интеграл (18) к легко вычисляемому виду; получаем:

$$I = \frac{(i\sqrt{\pi})^{2n}}{\sqrt{\rho_1 \ldots \rho_{2n}}} J e^{\sum\limits_{r}^{2n} \tau_r^2}, \tag{20}$$

где

$$\rho_r = 1 + i\gamma_r, \quad \tau_r = \frac{1}{2\sqrt{1+i\gamma_r}} \sum_{i,j}^{2n} \left[\frac{l_i + i(h_i - y_i)}{\sqrt{\delta_j}} c_{ij} m_{jr} \right].$$

Итак, функция распределения, выраженная через начальное состояние (при $t = 0$), в переменных v_r и x_r, имеет вид:

$$f(v_1, \ldots, v_n, x_1, \ldots, x_n, t) =$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{2n}\sqrt{\rho_1 \ldots \rho_{2n}}} J e^{\sum\limits_{r}^{2n} \tau_r^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int e^{-\sum\limits_{r}^{n} (d_r v_r' + d_{r+n} x_r')} . \tag{21}$$

$$\cdot g(v_1', \ldots, v_n', x_1', \ldots, x_n')\, dv_1', \ldots, dv_n', dx_1', \ldots, dx_n',$$

где

$$g(v_1', \ldots, v_n', x_1', \ldots, x_n') = f(v_1', \ldots, v_n', x_1', \ldots, x_n', 0).$$

§ 4. Уравнение для функции z теории броуновского движения имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2a} \sum_{r,s}^{n} b_{rs} \lambda_r \lambda_s - \sum_{r}^{n} \lambda_r Q_r. \tag{22}$$

Составляя «механические уравнения» в форме Лагранжа, умножая r-ое уравнение на v_r и суммируя по r, получаем аналогичное уравнение:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -\sum_{r,s}^{n} b_{rs} v_r v_s + \sum_{r}^{n} v_r Q_r. \tag{23}$$

На эту аналогию указал В. А. Дмитриев.

Государственный оптический институт.
Ленинград.

Поступило
13 X 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] ДАН, I, № 9, 601—605 (1935).