Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XVII, № 6

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

Н. МОИСЕЕВ

О ПРОБЛЕМЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 14 X 1937)

Проблема количественного изучения движений, определяемых системой дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k\ (x_1,\ x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

может быть рассматриваема с двух различных точек зрения. Во-первых, можно ставить задачу отыскания точных аналитических выражений фазовых координат x_k как функций времени t, удовлетворяющих уравнениям (1). Такая задача есть задача интеграции системы (1). Однако можно так же искать области или, если угодно, «трубки» в фазовом пространстве, которые определяли бы течение траектории с точностью до половины ширины трубки. Эту последнюю проблему мы как раз и называем проблемой локализации фазовых траекторий.

Локализационный аспект проблемы количественного изучения динамических траекторий представляет значительный интерес как для практики, так и для теории. Заметим, что именно в этом аспекте можно надеяться достичь плодотворного синтеза качественной и количественной теорий динамических проблем [1]. Частная разновидность теории локализации, интересующая нас в настоящей заметке, может быть вполне охарактеризована ссылками на теоремы Перрона [2], Чаплыгина [3] и Четаева [4]. Элементарное содержание последующих строк является не чем иным, как вполне естественным дополнением к названным теоремам.

Пусть S есть некоторая замкнутая непрерывная поверхность, ограничивающая некоторый односвязный n-мерный объем T фазового пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Мы предположим поверхность S разложенной на три следующие части:

S_1 — односвязный кусок, являющийся частью поверхности

$$U_1\ (x_1,\ x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{2}$$

S_2 — односвязный кусок, не имеющий общих точек с куском S_1 и являющийся частью поверхности

$$U_2\ (x_1,\ x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{3}$$

и наконец S_3 — кусок, дополняющий сумму $S_1 + S_2$ до полной поверхности S и рассматриваемый нами как часть поверхности

$$W\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n) = 0. \tag{4}$$

Функции U_1, U_2 и W, входящие в уравнения вспомогательных поверхностей (2), (3) и (4), предполагаются нами однозначными, непрерывными и допускающими повсюду на многообразиях S_1, S_2 и S_3 соответственно ограниченные по абсолютной величине частные производные первого порядка по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Производные эти могут иметь конечные разрывы непрерывности в точках некоторых аналитических кривых, число которых конечно и которые расположены на поверхности S. Уравнения вспомогательных поверхностей (2), (3) и (4) предполагаются написанными в таком виде, что направляющие косинусы наружной по отношению к объему T нормали к этим поверхностям всегда имеют тот же знак, что и соответствующие частные производные от функций U_1, U_2 и W.

Пограничная кривая, разделяющая S_1 от S_3, считается включенной как в многообразие S_1, так и в многообразие S_3. Аналогичное замечание имеет место и по отношению к точкам кривой, разделяющей S_2 от S_3. Многообразие S_3 называется нами боковой поверхностью трубки T. Многообразия S_1 и S_2 называются первым и вторым сечениями трубки T соответственно.

В частном случае, когда первое сечение трубки S_1 вырождается в точку A, мы будем говорить о трубке конического типа, имеющей свою вершину в точке A. В случае, когда сечение S_1 совпадает с сечением S_2 таким образом, что нормали в совпадающих точках к S_1 и S_2 соответственно оказываются друг другу противоположными, мы будем говорить о замкнутой трубке. Бывший односвязным, объем T в этом случае делается двусвязным, с топологической точки зрения эквивалентным тору.

Все трубки, рассматриваемые в настоящей заметке, предполагаются не содержащими ни внутри себя, ни на своей пограничной поверхности никаких особых точек системы (1), в которых нарушалась бы однозначность определения траектории ее начальной точкой. Единственный случай, представляющий исключение в этом смысле, специально оговаривается в тексте. Функции X_k предполагаются однозначными и непрерывными повсюду в рассматриваемой области.

Образуем выражения:

$$\left(\dot{U}_1\right)_{S_1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U_1}{\partial x_k} X_k\right)_{S_1} \tag{5}$$

и

$$\left(\dot{W}\right)_{S_3} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_k} X_k\right)_{S_3}. \tag{6}$$

В силу сказанного выше это будут две однозначные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определенные на многообразиях S_1 и S_3 соответственно и непрерывные повсюду на этих многообразиях, за исключением, быть может, точек множества меры нуль (по отношению к мере множеств S_1 и S_3), в которых функции (5) и (6) могут иметь конечные разрывы непрерывности.

Если функции $\left(\dot{U}_1\right)_{S_1}$ и $\left(\dot{W}\right)_{S_3}$ являются повсюду на многообразиях S_1 и S_3 соответственно отличными от нуля и отрицательными (положительными), мы будем говорить, что трубка T отгорожена изнутри (извне) кусками S_1 и S_3 ее пограничной поверхности S.

Теорема 1. *Если система* (1) *допускает интегральный инвариант*

$$\int\int\ldots\int M\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n,\ t)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n, \tag{7}$$

где M остается положительной и ограниченной для всех рассматриваемых значений переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n$ и при любом t, и если трубка T является отгороженной изнутри (извне) своей боковой поверхностью S_3 и своим первым сечением S_1, то в таком случае существует бесконечное количество отрезков траекторий, не имеющих общих точек с боковой поверхностью трубки S_3 и соединяющих точки сечения S_1 с точками сечения S_2, будучи при этом заключенными внутри трубки T. Направление движения вдоль названных отрезков траекторий будет направлением от первого сечения ко второму (от второго к первому). Мера множества точек S_1, определяющих исключительные траектории по отношению к мере множества точек S_1, определяющих траектории, существование которых теоремой устанавливается, будет равна нулю.

Теорема применима только к трубкам общего цилиндрического типа, для которых как сечение S_1, так и сечение S_2 не вырождены в точку.

Не останавливаясь на очевидном доказательстве теоремы 1, мы рассмотрим еще одно вспомогательное понятие, которое позволит нам сформулировать теорему 2, в известном смысле аналогичную теореме 1.

Пусть

$$V\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{8}$$

будет некоторая функция переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n$, являющаяся однозначной и непрерывной повсюду внутри и на границе трубки T и допускающая в той же области частные производные первого порядка по всем этим переменным. Эти частные производные предполагаются непрерывными повсюду в рассматриваемой области, однако они могут также иметь и конечные разрывы непрерывности в точках множества меры нуль по сравнению с мерой множества, на котором определена функция (8). Система кусков поверхностей однопараметрического семейства:

$$V = c, \tag{9}$$

расположенных внутри трубки T, предполагается в топологическом смысле эквивалентной системе кусков параллельных плоскостей. Кроме того мы предполагаем, что для каждой пары отличных друг от друга кусков поверхностей (9):

$$V = c_1, \tag{10}$$

$$V = c_2, \tag{11}$$

из коих (10) отделяет (11) от S_1, в то время как (11) отделяет (10) от S_2, значения параметра c удовлетворяют неравенству:

$$c_1 < c_2. \tag{12}$$

Наконец мы предполагаем, что сечения трубки S_1 и S_2 являются сами элементами множества кусков поверхностей (9).

В случае, когда все изложенные условия являются выполненными, мы будем называть (9) системой правильных сечений трубки T, ориентированной в направлении от S_1 к S_2.

Теорема 2. *Если система уравнений* (1) *допускает построение* *такой системы* (9) *правильных сечений трубки* T, *ориентированной в направлении от* S_1 *к* S_2, *что выражение*

$$\dot{V} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} X_k \tag{13}$$

будет отличным от нуля и положительным повсюду внутри и на границе трубки T, *и если при этом трубка* T *будет отгороженной изнутри кусками* S_1 *и* S_3 *ее пограничной поверхности* S, *то в таком случае всякая траектория, исходящая из точки сечения* S_1, *будет содержать отрезок, соединяющий эту точку с одной из точек сечения* S_2, *не имеющий общих точек с боковой поверхностью* S_3 *и расположенный целиком внутри трубки* T.

Эта теорема, формулированная для случая «цилиндрической» трубки, остается верной также и в случае трубки конического типа, вершиной которой является точка, в которую выродилось сечение S_1. В случае, когда названная вершина является особой точкой системы (1), в которой все функции X_k обращаются в нуль, теорема 2 совпадает с частным случаем теоремы Четаева ([4]). В виду этого теорема 2 должна рассматриваться как естественный вариант теоремы Четаева, столь важной для теории устойчивости в смысле Ляпунова. Что касается изложенного выше варианта теоремы Четаева, то он имеет значение для теории устойчивости третьего типа (или устойчивости в смысле Крылова-Боголюбова).

Т е о р е м а 3. *Если трубка* T, *удовлетворяя всем условиям теоремы* 2, *оказывается кроме того замкнутой, то в таком случае существует по крайней мере одна замкнутая траектория системы* (1), *расположенная всеми своими точками внутри трубки* T *и имеющая с каждым куском системы поверхностей* (9) *только одну общую точку.*

Эта периодическая траектория должна быть асимптотически-устойчивой в смысле Ляпунова.

В случае, если трубка является отгороженной кусками S_1 и S_3 извне, теоремы 2 и 3 остаются справедливыми. Периодическая траектория теоремы 3 будет тогда абсолютно неустойчивой в смысле Ляпунова.

Изложенные выше теоремы без сомнения являются весьма элементарными и почти что тривиальными. Условия этих теорем, средактированные нами так, чтобы показать их очевидную достаточность, могут быть подвергнуты ряду модификаций. Это может привести к некоторым новым теоремам, определяющим условия, достаточные для существования п о к р а й н е й м е р е о д н о й траектории внутри трубки.

Заметим наконец, что вполне возможно сформулировать и ряд предложений, имеющих характер теорем, обратных только что упомянутым.

Поступило
14 X 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М о и с е е в, Труды Гос. астрономич. ин-та им. Штернберга, **9**, вып. 2 (1937). [2] O. P e r r o n, Math. Annalen, **76** (1915). [3] С. А. Ч а п л ы г и н, Труды ЦАГИ, **130** (1932). [4] Н. Г. Ч е т а е в, ДАН, I, 9 (1934).