Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

П. В. СОЛОВЬЕВ

ФУНКЦИЯ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 II 1939)

Пусть в плоскости xoy задана область D, ограниченная двумя прямолинейными отрезками, параллельными оси ox ($y=0$; $y=h$), и двумя прямолинейными отрезками

$$\begin{aligned}&(S_1)\quad x=k_1y,\\ &(S_2)\quad x=k_2y+b\quad \left(k_1, k_2\neq\pm\infty \text{ и } h<\frac{b}{2(k_1-k_2)}>0\right).\end{aligned}\tag{1}$$

Эту область будем называть трапецией. Построим функцию Грина для трапеции уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0.\tag{1'}$$

Будем искать функцию Грина в виде ряда

$$g(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x,y;\xi,\eta),\tag{2}$$

где функция $\Psi_n(x,y;\xi,\eta)$ $(n=1,2,\ldots)$ относительно переменных (x,y) является решением уравнения (1), относительно же переменных $(\xi,\ \eta)$ является решением уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.\tag{3}$$

Далее, если n четно:

$$\Psi_{n+1}(x,y;k_1\eta,\eta)=-\Psi_n(x,y;k_1\eta,\eta);$$

если n нечетно:

$$\Psi_{n+3}(x,y;k_2\eta+b,\eta)=-\Psi_n(x,y;k_2\eta+b,\eta).$$

Функция $\Psi_1(x,y;\xi,\eta)$ на S_1 и функция $\Psi_2(x,y;\xi,\eta)$ на S_2 должны принимать значения, совпадающие с значениями функции

$$\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\,l^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\tag{3'}$$

на этих отрезках. Как нетрудно убедиться, такими функциями $\Psi_n(x,y;\xi,\eta)$ будут

$$\Psi_1(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(2k_1y-x-\xi)^2}{4(y-\eta)} - k_1(x-k_1y)},$$

$$\Psi_2(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(2k_2y+2b-x-\xi)^2}{4(y-\eta)} - \{k_2x-k_2^2y-k_2b\}},$$

$$\Psi_3(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{[2k_1y-2(k_2y+b)+x-\xi]^2}{4(y-\eta)} \{(k_1-k_2)x-(k_1-k_2)^2y+(2k_1-k_2)b\}}$$

и т. д.

Подставляя полученные функции в (2), получим

$$g(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{n=1}^{\infty} (e^A + e^B - e^C - e^D), \text{ где}$$

$$A = -\frac{[2nk_1y-2(n-1)(k_2y+b)-x-\xi]^2}{4(y-\eta)} - \{[nk_1-(n-1)k_2]x-[nk_1-(n-1)k_2]^2y+(n-1)[nk_1-(n-1)k_2]b\}$$

$$B = -\frac{[2n(k_2y+b)-2(n-1)k_1y-x-\xi]^2}{4(y-\eta)} - \{[nk_2-(n-1)k_1]x-[nk_2-(n-1)k_1]^2y-n[nk_2-(n-1)k_1]b\}$$

$$C = -\frac{[2nk_1y-2n(k_2y+b)+x-\xi]^2}{4(y-\eta)} - \{n(k_2-k_1)x-n^2(k_2-k_1)^2y+n[(n+1)k_1-nk_2]b\}$$

$$D = -\frac{[2n(k_2y+b)-2nk_1y+x-\xi]^2}{4(y-\eta)} - \{n(k_1-k_2)x-n^2(k_1-k_2)^2y+n[(n+1)k_1-nk_2]b\}. \tag{4}$$

Ряд (4) для $0 \leqslant \eta < y \leqslant h < \frac{b}{(k_1-k_2)2}$ сходится абсолютно и равномерно в области D, так как сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{n_0-1} \Psi_n(x, y; \xi, \eta) + \frac{4}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-kn^2} \quad (k > 0)$$

будет мажорантным для ряда (4). Здесь числа n_0 и k подобраны таким образом, что для $n \geqslant n_0$

$$B_n = \min \left\{ \frac{\left[2k_1y - 2\left(1-\frac{1}{n}\right)(k_2y+b) - \frac{x+\xi}{n}\right]^2}{4(y-\eta)} + \left[\frac{nk_1-(n-1)k_2}{n^2}x - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left(k_1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)k_2\right)^2 y + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(k_1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)k_2\right)b\right]\right\};$$
$$\left\{ \frac{\left[2(k_2y+b) - 2\left(1-\frac{1}{n}\right)k_1y - \frac{x+\xi}{n}\right]^2}{4(y-\eta)} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{nk_2-(n-1)^{k_1}}{n^2}x - \left(k_2 - \left(1-\frac{1}{n}\right)k_1\right)^2 y - \left(k_2 - \left(k_2 - \left(1-\frac{1}{n}\right)k_1\right)b\right)\right]\right\}$$
$$\left\{ \frac{\left[2k_1y + 2(k_2y+b) - \frac{x-\xi}{n}\right]^2}{4(y-\eta)} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{k_2-k_1}{n}x - (k_2-k_1)^2 y + \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)k_1 - k_2\right)b\right]\right\};$$

$$\left\{\frac{\left[2k_1y-2(k_2y+b)-\frac{x-\xi}{n}\right]^2}{4(y-\eta)}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{k_1-k_2}{n}x-(k_1-k_2)^2y+\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)k_1-k_2\right)b\right]\right\}\geqslant k>0,$$

что возможно, так как

$$\lim_{n\to\infty} B_n>0.$$

Точно так же легко доказать абсолютную и равномерную сходимость в области D рядов, которые обозначим через

$$\frac{\partial g}{\partial x};\ \frac{\partial g}{\partial \xi};\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2};\ \frac{\partial g}{\partial \eta};\ \frac{\partial g}{\partial y}$$

и которые получим из ряда (4) почленным дифференцированием. Откуда

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\right)g(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_n(x,y;\xi,\eta)\equiv 0\right\}\equiv 0$$

и

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)g(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\Psi_n(x,y;\xi,\eta)\equiv 0\right\}\equiv 0.$$

Далее, значения функции $g(x,y;\xi,\eta)$ на S_1

$$g(x,y;k_1\eta,\eta)=\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}e^{-\frac{(x-k_1\xi)^2}{4(y-\eta)}},$$

так как после подстановки $\xi=k_1\eta$ показатели степеней второго и третьего слагаемых общего члена ряда (4) и степени четвертого слагаемого и первого, после замены n через $n+1$, совпадают. Точно так же подстановкой $\xi=k_2\eta+b$ убеждаемся, что значение функции $g(x,y;\xi,\eta)$ на S_2 совпадает с значениями функции (3′).

Из всего сказанного следует, что построенная функция $g(x,y;\xi,\eta)$ есть функция Грина уравнения (1) для трапеции. В формуле (4), полагая $k_1=k_2=0$, получим функцию Грина для прямоугольника.

Узбекистанский государственный университет.
Самарканд.

Поступило
4 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Гурса, Курс математического анализа, т. III.