Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

В. ТАРТАКОВСКИЙ

МЕТОД ИЗБИРАТЕЛЬНОГО «ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕТА»

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 15 II 1939)

Пусть $N(\Delta, D;\ z;\ p_1, \ldots, p_r)$ означает количество не превосходящих z положительных чисел прогрессии $Du+\Delta$ [где $(D, \Delta)=1$, а $u=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$], не принадлежащих вместе с тем ни одной из r прогрессий: $p_1u_1, p_2u_2, \ldots, p_ru_r$, где $u_i=1, 2, 3, \ldots$, простые же числа $p_1, p_2, \ldots p_r$ взаимно-просты с D.

Имеет место очевидное соотношение:

$$N(\Delta, D;\ z;\ p_1, \ldots, p_r)=N(\Delta, D;\ z;\ p_1, \ldots, p_{r-1})-$$
$$-N(\Delta_r, Dp_r;\ z;\ p_1, \ldots, p_{r-1}).$$

Повторное применение этого соотношения к правой части дает новое соотношение:

$$N(\Delta, D;\ z;\ p_1, \ldots, p_r)=N(\Delta, D;\ z)-\sum_{1\leqslant i_1\leqslant r} N(\Delta_{i_1}, Dp_{i_1};\ z)+$$
$$+\sum_{1\leqslant i_2<i_1\leqslant r} N(\Delta_{i_1i_2}, Dp_{i_1}p_{i_2};\ z;\ p_1, \ldots p_{i_2-1}). \tag{1}$$

Если мы откинем в последней сумме правой части несколько слагаемых, то правая часть не увеличится, ибо отброшенные члены не отрицательны и таким образом (1) перейдет в неравенство, дающее оценку снизу для $N(\Delta, D;\ z;\ p_1, p_2, \ldots, p_r)$. Уменьшенную область суммирования обозначим через $\bar{\omega}_2$, а область суммирования для $i_1 (1\leqslant i_1\leqslant r)$ обозначим через $\bar{\omega}_1$. Тогда:

$$N(\Delta, D;\ z;\ p_1, \ldots p_r)\geqslant N(\Delta, D;\ z)-\sum_{i_1\in\bar{\omega}_1} N(\Delta_{i_1}, Dp_{i_1};\ z)+$$
$$+\sum_{(i_1, i_2)\in\bar{\omega}_2} N(\Delta_{i_1i_2}, Dp_{i_1}p_{i_2};\ z;\ p_1, \ldots, p_{i_2-1}). \tag{2}$$

Мы будем в качестве $\bar{\omega}_2$ брать часть треугольной области $1\leqslant i_2< < i_1\leqslant r$, ограниченную дополнительным условием: $i_2<\omega_2(i_1)$. Применим к слагаемым последней суммы в (2) ту же формулу (2) и выберем в качестве ограничения для i_4 дополнительное условие $i_4<\omega_4(i_1, i_2, i_3)$. Продолжая так дальше и отбрасывая последнюю сумму неотрицательных слагаемых, мы получим неравенство:

$$N(\Delta, D;\ z;\ p_1, \ldots, p_r) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{q} \Bigg[\sum_{\substack{(i_1, \ldots, i_{2k-1}) \in \overline{\omega}_{2k-1} \\ i_{2k} < \min[i_{2k-1},\ \omega_{2k}(i_1, \ldots, i_{2k-1})]}} N(\Delta_{i_1, \ldots, i_{2k}}, Dp_{i_1} \ldots p_{i_{2k}};\ z) -$$

$$- \sum_{\substack{(i_1, \ldots, i_{2k}) \in \overline{\omega}_{2k} \\ i_{2k+1} < i_{2k}}} N(\Delta_{i_1, \ldots, i_{2k+1}}, Dp_{i_1} \ldots p_{i_{2k+1}};\ z) \Bigg]. \tag{3}$$

Здесь $\omega_0 = r$, а ω_v есть область, по которой мы суммируем символы: $N(\Delta_{i_1, \ldots, i_v}, Dp_{i_1} \ldots p_{i_v};\ z)$. Заметим, что $N(\Delta', D';\ z) = \frac{z}{D'} + \theta'$, где $|\theta'| < 1$.

Так как алгебраическая сумма величин θ' для всех слагаемых в правой части (3) меньше, чем число этих слагаемых, которое мы обозначим через R, то из формулы (3) следует неравенство:

$$N(\Delta, D;\ z;\ p_1, \ldots, p_r) >$$

$$> \frac{z}{D} \sum_{k=0}^{q} \Bigg[\sum_{\substack{(i_1, \ldots, i_{2k-1}) \in \overline{\omega}_{2k-1} \\ i_{2k} < \min[i_{2k-1},\ \omega_{2k}(i_1, \ldots, i_{2k-1})]}} \frac{1}{p_{i_1} \ldots p_{i_{2k}}} - \sum_{\substack{(i_1, \ldots, i_{2k}) \in \overline{\omega}_{2k} \\ i_{2k+1} < i_{2k}}} \frac{1}{p_{i_1} \ldots p_{i_{2k+1}}} \Bigg] - R. \tag{4}$$

Возможны различные способы выбора функций $\omega_{2k}(i_1, \ldots, i_{2k-1})$. Viggo Brun брал в качестве ряда $p_1, p_2, \ldots, p_r$ * все простые числа от 2 до наибольшего простого числа, не превосходящего z^{α_0}, кроме простых делителей D, которые мы обозначим через $q_1, \ldots, q_\delta$. Он выбирал $\omega_{2k}(i_1, \ldots, i_{2k-1}) = z^{\alpha_0 \alpha^k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, где α_0 и α — положительные правильные дроби, а число n определяется из условия:

$$z^{\alpha_0 \alpha^{n-1}} \geqslant A_0 > z^{\alpha_0 \alpha^n},$$

где A_0—достаточно большое, но независимое от z число. Иначе говоря:

$$n = \left[\frac{1}{\ln \frac{1}{\alpha}} \left(\ln \ln z - \ln \ln A + \ln \frac{1}{\alpha_0} \right) \right] + 1. \tag{5}$$

Число же $q = n + \left[\frac{g+1}{2} \right]$, где g есть количество простых чисел, не превосходящих A_0.

При $k \geqslant n$, $\omega_{2k} = z^{\alpha_0 \alpha^n}$. При таком способе выбора ω_k для R получается следующая оценка сверху:

$$R \leqslant r \cdot \omega_2^2 \cdot \omega_4^2 \ldots \omega_{2n}^2 \cdot 2^g \leqslant \frac{z^{\alpha_0(1+2\alpha+2\alpha^2+\ldots)} \cdot 2^g}{\alpha_0 \ln z \cdot (\alpha_0 \alpha \ln z)^2 (\alpha_0 \alpha^2 \ln z)^2 \ldots} \leqslant \frac{z^{\alpha_0 \frac{1+\alpha}{1-\alpha}}}{(\ln z)^\mu},$$

где μ — любое фиксированное сколь угодно большое положительное число при достаточно большом z.

При $\alpha = \frac{2}{3}$ и $\alpha_0 = \frac{1}{5}$ формула (4) принимает вид:

$$N(\Delta, D;\ z;\ p_1, \ldots, p_r) \geqslant \frac{z}{D} B_1 \left[z;\ \frac{1}{5};\ \frac{2}{3} \right] - \frac{z}{(\ln z)^\mu} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{5e^{-c}}{\varphi(D)} \cdot 0.807 \frac{z}{\ln z} - \frac{z}{(\ln z)^2}.$$

---

* В дальнейшем мы будем пользоваться результатами и обозначениями моей статьи: «О некоторых суммах типа Viggo Brun'a» (см. выше).

В отличие от Brun'а который выбирал для ω_{2k} значения, независимые от предыдущих индексов, мы будем рассматривать ω_{2k} как функции от i_1. Таким образом для каждого p_{i_1} последующий процесс приближенного решения будет индивидуализирован. Такое приближенное решето можно назвать «избирательным в первом шаге». Зависимость ω_{2k} от i_1 мы определили различно для $p_{i_1} \leqslant z^{\frac{1}{7}}$ и для $p_{i_1} > z^{\frac{1}{7}}$. Ряд же $p_1, p_2, \ldots, p_r$ мы выбираем, как V. Brun, только полагаем α_0 равным $\frac{1}{3} + \varepsilon$.

При $p_{i_1} \leqslant z^{\frac{1}{7}}$; $\omega_{2k}(i_1) = z^{\frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots n')$;

$$\omega_{2k}(i_1) = z^{\frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^{n'}} \quad (k = n'+1, \ldots).$$

При $z^{\frac{1}{7}} < p_{i_1} \leqslant z^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$; $\omega_{2k}(i_1) = \left(\frac{z}{p_{i_1}}\right)^{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}$ $(k = 1, 2, \ldots n'')$;

$$\omega_{2k}(i_1) = \left(\frac{z}{p_{i_1}}\right)^{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n'}} \quad (k = n''+1 \ldots).$$

Здесь согласно (5):

$$n' = \left[\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}(\ln\ln z - \ln\ln A + \ln 7)\right] + 1;$$

$$n'' = \left[\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\left(\ln\ln\frac{z}{p_{i_1}} - \ln\ln A + \ln 5\right)\right] + 1.$$

Сообразно этому сумма в правой части неравенства (4) разобьется на две суммы, и остаточный член — на два остаточных члена: $Q_1 - Q_2$ и $R_1 + R_2$, где

$$Q_1 = \frac{z}{D} B_3\left[z, \frac{1}{7}, \frac{2}{3}\right]; \quad Q_2 = \sum_{p > z^{\frac{1}{7}}}^{\leqslant z^{\frac{1}{3}+\varepsilon}} \frac{1}{p} B_2\left[\frac{z}{p}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right]; \quad R_1 \leqslant \frac{z}{(\ln z)^2}.$$

$$R_2 \leqslant \sum_{p > z^{\frac{1}{7}}}^{\leqslant z^{\frac{1}{3}+\varepsilon}} \frac{\left(\frac{z}{p}\right)}{\left(\ln\frac{z}{p}\right)^2} \leqslant \frac{z}{\left(\ln\frac{z}{z^{\frac{1}{3}+\varepsilon}}\right)^2} \sum_{p > z^{\frac{1}{7}}}^{\leqslant z^{\frac{1}{3}+\varepsilon}} \frac{1}{p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{z}{\left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right)^2 \ln^2 z} 2\ln\left(\frac{7}{3} + 7\varepsilon\right) \leqslant \frac{4z}{(\ln z)^2}.$$

Но согласно вышенапечатанной моей статье:

$$Q_2 = \sum_{p > z^{\frac{1}{7}}}^{\leqslant z^{\frac{1}{3}+\varepsilon}} \frac{z}{D} \frac{1}{p} \frac{e^{-c}}{\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_\delta}\right)} \frac{1}{\frac{1}{6}\ln\frac{z}{p}} (1 + \bar{\theta} \cdot 0.029) \leqslant$$

$$\leqslant 1.029 \frac{e^{-c}}{\varphi(D)} \cdot \frac{z}{\frac{1}{6}} \sum_{p \geqslant z^{\frac{1}{7}}}^{\leqslant z^{\frac{1}{3}+\varepsilon}} \frac{1}{p \ln\frac{z}{p}}.$$

Обычные преобразования типа Абеля (прямые и обратные) при помощи известной формулы: $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + B + O\left(\frac{1}{\ln^{\mu} x}\right)$ ([2]) (смысл μ определен был выше) позволяют заменить последнюю сумму интегралом:

$$\sum_{p > z^{\frac{1}{7}}}^{\leqslant z^{\frac{1}{3}+\varepsilon}} \frac{1}{p \ln \frac{z}{p}} = \frac{1}{\ln z} \int_{\frac{1}{7}}^{\frac{1}{3}+\varepsilon} \frac{du}{u(1-u)} + O\left(\frac{1}{\ln^2 z}\right) = \frac{1}{\ln z} \ln(3+\varepsilon') + O\left(\frac{1}{\ln^2 z}\right).$$

Так как $D\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_\delta}\right) = \varphi(D)$, то следовательно

$$N(\Delta, D; z; p_1, \ldots, p_r) \geqslant e^{-c}(1 - 0.0034) \frac{z}{\varphi(D)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{7} \ln z} -$$

$$- e^{-c} 1.029 \frac{z}{\varphi(D)} \frac{1}{\frac{1}{6} \ln z} + O\left(\frac{z}{\ln^2 z}\right) \geqslant 0.45 \frac{z}{\varphi(D) \ln z} + O\left(\frac{z}{\ln^2 z}\right).$$

Отсюда следует, что в каждой прогрессии $Du + \Delta$ [где $(D, \Delta) = 1$] до достаточно большого числа z существует не менее $a \frac{z}{\varphi(D) \ln z}$ (a — абсолютная константа) чисел простых или имеющих два простых множителя, причем эти простые множители должны быть заключены между $z^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$ и $z^{\frac{2}{3}-2\varepsilon}$. Интервал для этих простых множителей может быть сильно сужен, если воспользоваться методом избирательности и при третьем, пятом и т. д. шагах приближенного решета. Я подсчитал, что этим способом вышедоказанный результат может быть уточнен так:

Теорема. *В прогрессии* $Du + \Delta$ [*где* $(D, \Delta) = 1$] *в интервале* $(0, z)$ *при достаточно большом* z, $[z \geqslant z_0(D)]$, *имеется свыше* $a \cdot \frac{z}{\varphi(D) \ln z}$ (a—*константа, не зависящая ни от* D, *ни от* Δ, *ни от* z) *чисел простых или имеющих два простых множителя, причем в последнем случае эти простые множители должны быть заключены между* $z^{\frac{1}{2}-\delta}$ *и* $z^{\frac{1}{2}+\delta}$, *где* $\delta = 0.01$.

Число δ подается и дальнейшему уменьшению.

Первые применения метода избирательного приближенного решета к уравнению Эйлера и к проблеме близнецов показывают, что существуют решения уравнения Эйлера в почти-простых числах и существует бесконечно много пар почти-простых близнецов, причем эти почти-простые числа имеют не более четырех простых множителей.

Поступило
19 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Viggo Brun, Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach. Videnskapsselskapets Skrifter. I. Mat.-Naturv. Klasse Kristiania, № 3 (1920). [2] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, B. I, стр. 200—201.