Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

В. ТАРТАКОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ СУММАХ ТИПА VIGGO BRUN'а

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 15 II 1939)

При изучении приближенного решета Эратосфена можно, как показал V. Brun, пользоваться суммами вида:

$$1-\sum_{i_1\in\Omega_1}\frac{1}{p_{i_1}}+\sum_{(i_1,i_2)\in\Omega_2}\frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}}-\ldots+(-1)^m\sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in\Omega_m}\frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_m}}\qquad(1)$$

с различными областями суммирования $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_m$. В настоящей заметке я рассмотрю некоторые специальные суммы такого вида, построенные следующим образом. Возьмем интервал $(0, z)$, где z—достаточно большое число. Этот интервал разделим на частные интервалы точками:

$$t_0=z^{\alpha_0};\ t_1=z^{\alpha_0\alpha_1};\ t_2=z^{\alpha_0\alpha_1\alpha_2};\ \ldots\ t_n=z^{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}=A,$$

где числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ — положительные дроби, а число A заключено между фиксированными, но достаточно большими константами. Все простые числа из интервала $(0, z^{\alpha_0})$ перенумеруем в порядке возрастания, причем число простых чисел, не превосходящих A, обозначим через g:

$$p_1=2,\ p_2=3;\ p_3=5;\ \ldots\ p_g\leqslant A<p_{g+1}<p_{g+2}<\ldots<p_r\leqslant z^{\alpha_0}.\qquad(2)$$

Обозначим далее через p_{r_v} наибольшее простое число, не превосходящее t_v. Таким образом: $p_{r_0}=p_r$ $(r_0=r)$ и $p_{r_n}=p_g\,(r_n=g)$. Часть ряда (2) из интервала (A, z^{α_0}) числами $p_{r_n}, p_{r_{n-1}}, \ldots p_{r_1}, p_{r_0}$ разбивается на n сегментов. Множество обратных элементов такого сегмента, т. е. $\frac{1}{p_{r_v+1}}$, $\frac{1}{p_{r_v+2}}, \ldots, \frac{1}{p_{r_{v}-1}}$, мы обозначим через $\bar{\sigma}_v$ и построим при помощи таких сегментов $\bar{\sigma}_v\,(v=\lambda+1, \lambda+2, \ldots, \mu)$ следующую «лестничную схему типа V. Brun'а» (1):

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\sigma}_\mu,\ \bar{\sigma}_{\mu-1},\ \ldots,\ \bar{\sigma}_{\lambda+3},\ \bar{\sigma}_{\lambda+2},\ \bar{\sigma}_{\lambda+1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \bar{\sigma}_\mu,\ \bar{\sigma}_{\mu-1},\ \ldots,\ \bar{\sigma}_{\lambda+3},\ \bar{\sigma}_{\lambda+2},\ \bar{\sigma}_{\lambda+1}\end{array}\right\}\ k\ \text{строк}$$

$$
(B)\qquad
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\bar{\sigma}_{\mu},\ \bar{\sigma}_{\mu-1},\ \ldots,\ \bar{\sigma}_{\lambda+3},\ \bar{\sigma}_{\lambda+2}\\
\bar{\sigma}_{\mu},\ \bar{\sigma}_{\mu-1},\ \ldots,\ \bar{\sigma}_{\lambda+3},\ \bar{\sigma}_{\lambda+2}
\end{array}\right\}\ 2\ \text{строки}\\
\left.\begin{array}{l}
\bar{\sigma}_{\mu},\ \bar{\sigma}_{\mu-1},\ \ldots,\ \bar{\sigma}_{\lambda+3}\\
\bar{\sigma}_{\mu},\ \bar{\sigma}_{\mu-1},\ \ldots,\ \bar{\sigma}_{\lambda+3}
\end{array}\right\}\ 2\ \text{строки}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left.\begin{array}{l}
\bar{\sigma}_{\mu},\ \bar{\sigma}_{\mu-1}\\
\bar{\sigma}_{\mu},\ \bar{\sigma}_{\mu-1}
\end{array}\right\}\ 2\ \text{строки}\\
\left.\begin{array}{l}
\bar{\sigma}_{\mu}\\
\bar{\sigma}_{\mu}
\end{array}\right\}\ 2\ \text{строки}
\end{array}
$$

Схема состоит из $2(\mu-\lambda-1)+k$ строк. Первые k строк содержат все числа сегментов: $\bar{\sigma}_{\mu}, \ldots, \bar{\sigma}_{\lambda+1}$, следующие две строки укорачиваются справа на один сегмент, следующие две строки укорачиваются справа еще на один сегмент и т. д., так что последние две строки состоят всего из одного сегмента. Элементом схемы мы считаем числа $\frac{1}{p}$. Этой схеме мы сопоставим сумму типа (1)

$$\sum_{v=0}^{2(\mu-\lambda-1)+k} \sum_{(i_1,\ldots,i_v)\in\Omega_v} \frac{(-1)^v}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_v}}.$$

В эту сумму входят с соответственными знаками произведения любых комбинаций элементов схемы (B), удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) μ-тый множитель каждого произведения $\left(\text{т. е. } \frac{1}{p_{i_\mu}}\right)$ взят из μ-той строки схемы (B), т. е.

$$i_1 \leqslant r_0;\ i_2 \leqslant r_0;\ \ldots;\ i_k \leqslant r_0;\ i_{k+1} \leqslant r_1;\ i_{k+2} \leqslant r_1;\ i_{k+3} \leqslant r_2;\ i_{k+4} \leqslant r_2;\ \ldots$$
$$\ldots;\ i_\mu \leqslant r_{\left[\frac{\mu-k+1}{2}\right]}\ (\mu = k, k+1, \ldots, v);\ \ldots$$

2) В произведении значки при множителях образуют убывающий ряд: $i_1 > i_2 > \ldots > i_v$.

Составленную таким образом сумму мы обозначим символом

$$P_k(\bar{\sigma}_{\lambda+1}, \bar{\sigma}_{\lambda+2}, \ldots, \bar{\sigma}_{\mu}).$$

Введем следующие обозначения:

$$\sigma_v = \sum_{r_v < i \leqslant r_{v-1}} \frac{1}{p_i};\quad \sigma_v^{(s)} = \sum_{\substack{i_1>i_2>\ldots>i_s\\ r_v<i_k\leqslant r_{v-1}\ (k=1,2,\ldots s)}} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_s}};\quad \pi_v = \prod_{r_v<i\leqslant r_{v-1}} \left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

Если $s > \rho_v = r_{v-1} - r_v$, то $\sigma_v^{(s)} = 0$. Отметим, что $\sigma_v^{(1)} = \sigma_v$. По известным формулам Mertens'a (2)

$$\sigma_v = \ln\frac{1}{\alpha_v} + \theta\,\frac{5(1+\alpha_v)}{\ln z^{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_v}} \quad \text{и} \quad \pi_v = \alpha_v\, e^{\theta\frac{7(1+\alpha_v)}{\ln z^{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_v}}}.$$

Здесь и всюду далее $|\theta|<1$, причем одним и тем же знаком мы будем обозначать различные числа, удовлетворяющие этому условию. Через $\bar{\theta}$ мы будем обозначать числа, заключенные между 0 и 1 ($0 \leqslant \bar{\theta} \leqslant 1$). Так как $5(1+\alpha_v)<10$ и $7(1+\alpha_v)<14$, то можно указать константу F такую, что

$$\sigma_v = \ln\frac{1}{\alpha_v} + \frac{\theta F}{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_v \ln z}; \quad \pi_v = \alpha_v\left[1+\frac{\theta F}{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_v \ln z}\right].$$

Так как $z^{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_v} \geqslant A$ (ибо $v \leqslant n$), то $\frac{\theta F}{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_v \ln z} \leqslant \frac{F}{\ln A} < \varepsilon$, где ε — сколь угодно малая положительная константа, если только A достаточно велико, и потому

$$\sigma_v = \ln\frac{1}{\alpha_v} + \theta\varepsilon < \ln\frac{1}{\alpha_v} + \varepsilon; \quad \pi_v = \alpha_v(1+\theta\varepsilon) > \alpha_v(1-\varepsilon).$$

Мы будем выбирать α_v так, чтобы все σ_v были меньше 1, т. е. $\alpha_v > e^{-(1-\varepsilon)}$.

После этих замечаний перейдем к вычислению $P_k(\bar{\sigma}_{\lambda+1}, \ldots, \bar{\sigma}_\mu)$. Для этого символа очевидно имеет место соотношение:

$$P_k(\bar{\sigma}_{\lambda+1}, \bar{\sigma}_{\lambda+2}, \ldots, \bar{\sigma}_\mu) = P_{k+2}(\bar{\sigma}_{\lambda+2}, \ldots, \bar{\sigma}_\mu) - \sigma_{\lambda+1}^{(1)} P_{k+1}(\bar{\sigma}_{\lambda+2}, \ldots, \bar{\sigma}_\mu) + $$
$$+ \sigma_{\lambda+1}^{(2)} P_k(\bar{\sigma}_{\lambda+2}, \ldots, \bar{\sigma}_\mu) - \ldots + (-1)^k \sigma_{\lambda+1}^{(k)} P_2(\bar{\sigma}_{\lambda+2}, \ldots, \bar{\sigma}_\mu).$$

$P_k(\bar{\sigma}_\mu)$ вычисляется очень просто:

$$P_k(\bar{\sigma}_\mu) = 1 - \sigma_\mu^{(1)} + \sigma_\mu^{(2)} - \ldots + (-1)^k \sigma_\mu^{(k)} =$$
$$= \pi_\mu - (-1)^{k+1}\left[\sigma_\mu^{(k+1)} - \sigma_\mu^{(k+2)} + \ldots + (-1)^{\rho_\mu-k-1}\sigma_\mu^{(\rho_\mu)}\right].$$

Но $\sigma_\mu \sigma_\mu^{(s-1)} > s\sigma_\mu^{(s)}$, если $\sigma_\mu^{(s-1)} \neq 0$. Отсюда следуют три неравенства для $\sigma_\mu^{(s)}$:

$$\sigma_\mu^{(s)} < \frac{\sigma_\mu}{s}\cdot\sigma_\mu^{(s-1)}; \quad \sigma_\mu^{(s)} < \sigma_\mu^{(s-1)}; \quad \sigma_\mu^{(s)} < \frac{\sigma_\mu^s}{s!}.$$

Откуда

$$\sigma_\mu^{(k+1)} > \sigma_\mu^{(k+1)} - \sigma_\mu^{(k+2)} + \ldots + (-1)^{\rho_\mu-k-1}\sigma_\mu^{(\rho_\mu)} > 0,$$

т. е.

$$P_k(\sigma_\mu) = \pi_\mu + (-1)^k\cdot\bar{\theta}\cdot\sigma_\mu^{(k+1)} = \pi_\mu + (-1)^k\cdot\bar{\theta}\cdot\frac{\sigma_\mu^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Далее:

$$P_k(\bar{\sigma}_{\mu-1}, \bar{\sigma}_\mu) = P_{k+2}(\bar{\sigma}_\mu) - \sigma_{\mu-1}^{(1)} P_{k+1}(\bar{\sigma}_\mu) + \ldots + (-1)^k \sigma_{\mu-1}^{(k)} P_2(\bar{\sigma}_\mu) =$$
$$= \sum_{v=0}^{k} (-1)^v \sigma_{\mu-1}^{(v)}\left[\pi_\mu + \bar{\theta}\cdot(-1)^{k-v}\frac{\sigma_\mu^{k+2-v+1}}{(k+2-v+1)!}\right] =$$
$$= \pi_\mu \sum_{v=0}^{k}(-1)^v\sigma_{\mu-1}^{(v)} + (-1)^k\bar{\theta}\cdot\sum_{v=0}^{k}\frac{\sigma_{\mu-1}^{v}\sigma_\mu^{k-v+3}}{v!\,(k-v+3)!} =$$
$$= \pi_\mu\left[\pi_{\mu-1} + (-1)^k\bar{\theta}\cdot\frac{\sigma_{\mu-1}^{k+1}}{(k+1)!}\right] + (-1)^k\bar{\theta}\cdot\frac{(\sigma_{\mu-1}+\sigma_\mu)^{k+3}}{(k+3)!} =$$
$$= \pi_{\mu-1}\pi_\mu + (-1)^k\bar{\theta}\cdot\left[\frac{\sigma_{\mu-1}^{k+1}}{(k+1)!}\pi_\mu + \frac{(\sigma_{\mu-1}+\sigma_\mu)^{k+3}}{(k+3)!}\right].$$

Продолжая так дальше, получим:

$$P_k(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\mu) = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_\mu + (-1)^k\bar\theta \cdot \left[\frac{\sigma_1^{k+1}}{(k+1)!} \pi_2\pi_3 \ldots \pi_\mu + \right.$$

$$+ \frac{(\sigma_1+\sigma_2)^{k+3}}{(k+3)!} \pi_3 \ldots \pi_\mu + \ldots + \frac{(\sigma_1+\ldots+\sigma_{\mu-1})^{k+2\mu-3}}{(k+2\mu-3)!} \pi_\mu +$$

$$\left. + \frac{(\sigma_1+\ldots+\sigma_\mu)^{k+2\mu-1}}{(k+2\mu-1)!} \right]$$

или если обозначить

$$\frac{\sigma_1^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{\pi_1} + \frac{(\sigma_1+\sigma_2)^{k+3}}{(k+3)!} \frac{1}{\pi_1\pi_2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(\sigma_1+\ldots+\sigma_\mu)^{k+2\mu-1}}{(k+2\mu-1)!} \cdot \frac{1}{\pi_1\pi_2\ldots\pi_\mu} = S_{k,\mu},$$

то

$$P_k(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_\mu) = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_\mu \left[1 + (-1)^k \cdot \bar\theta \cdot S_{k,\mu}\right].$$

Рассмотрим еще сегмент $\bar\sigma_{n+1}$, построенный при помощи всех простых чисел от $p_1 = 2$ до p_g; значит, $\bar\sigma_{n+1}$ есть множество: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$ $\ldots, \frac{1}{p_g}$. Построим далее схему (B′), которая получится, если в схеме (B) взять $\lambda = 0$, $\mu = n$ и добавить слева еще один столбец сегментов $\bar\sigma_{n+1}$. Строк в этом столбце сегментов возьмем на g больше, чем в столбце сегментов $\bar\sigma_n$. Сумму, построенную применительно к этой схеме, обозначим через $\bar P_k(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_n; \bar\sigma_{n+1})$. Она отличается от суммы $P_k(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots$ $\ldots, \bar\sigma_n)$ множителем

$$\pi_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_g}\right),$$

т. е.

$$\bar P_k(\bar\sigma_1, \bar\sigma_2, \ldots, \bar\sigma_n; \bar\sigma_{n+1}) = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_{n+1} \left\{1 + (-1)^k\bar\theta \cdot S_{k,n}\right\} =$$

$$= P(z^{\alpha_0}) \left\{1 + (-1)^k\bar\theta \cdot S_{k,n}\right\},$$

если через $P(u)$ обозначить произведение:

$$\prod_{2 \leqslant p \leqslant u} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(p, — конечно, простые числа).

Иногда бывает нужно строить аналогичные суммы, исключив из ряда (2) некоторые простые числа: $q_1, q_2, \ldots, q_\delta$. Оставшийся ряд назовем ряд (2′). Тогда все вычисление может быть повторено с тем отличием, что вместо $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n+1}$ и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n+1}$ надо будет брать величины:

$$\pi_1', \pi_2', \ldots, \pi_{n+1}' \quad \text{и} \quad \sigma_1', \sigma_2', \ldots, \sigma_{n+1}',$$

где

$$\sigma_v' = \sum_{\substack{r_v < i \leqslant r_{v-1} \\ p_i \neq q_j (j=1,2,\ldots,\delta)}} \frac{1}{p_i}; \quad \pi_v' = \prod_{\substack{r_v < i \leqslant r_{v-1} \\ p_i \neq q_j (j=1,2,\ldots,\delta)}} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Аналогично определятся и $\sigma_v'^{(s)}$, $\bar\sigma_v'$ и $\bar P_k(\bar\sigma_1', \bar\sigma_2', \ldots, \bar\sigma_n'; \bar\sigma_{n+1}')$.

Мы получим тогда следующий результат:

$$\overline{P}_k(\overline{\sigma}_1', \overline{\sigma}_2', \ldots, \overline{\sigma}_n'; \overline{\sigma}_{n+1}') = \pi_1'\pi_2' \ldots \pi_{n+1}' \left\{1 + (-1)^k \theta \cdot S_k'\right\},$$

где

$$S_k' = \frac{\sigma_1'^{k+1}}{(k+1)!} \frac{1}{\pi_1'} + \frac{(\sigma_1' + \sigma_2')^{k+3}}{(k+3)!} \frac{1}{\pi_1'\pi_2'} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(\sigma_1' + \ldots + \sigma_n')^{k+2n-1}}{(k+2n-1)!} \frac{1}{\pi_1'\pi_2' \ldots \pi_n'};$$

$$\pi_1'\pi_2' \ldots \pi_{n+1}' = \frac{P(z^{\alpha_0})}{\prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant \delta}\left(1 - \frac{1}{q_j}\right)}.$$

Но $\pi_i' \geqslant \pi_i$; $\frac{1}{\pi_i'} \leqslant \frac{1}{\pi_i}$; $\sigma_i' \leqslant \sigma_i$, вследствие чего

$$S_k' \leqslant S_{k,n}.$$

Таким образом

$$\overline{P}_k(\overline{\sigma}_1', \overline{\sigma}_2', \ldots, \overline{\sigma}_n'; \overline{\sigma}_{n+1}') = \frac{P(z^{\alpha_0})}{\prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant \delta}\left(1 - \frac{1}{q_j}\right)} \left\{1 + (-1)^k \cdot \theta \cdot S_k'\right\}.$$

При конкретном задании чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ оценку сверху для S_k' нетрудно провести.

Положим например все α_i, кроме α_0, равными постоянному числу α $(\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha)$.

В этом случае мы введем вместо $\overline{P}_k(\overline{\sigma}_1', \overline{\sigma}_2', \ldots, \overline{\sigma}_n'; \overline{\sigma}_{n+1}')$ символ $B_k[z, \alpha_0, \alpha]$.

При $\alpha = \frac{2}{3}$ мы получим

$$S_k' \leqslant S_{k,n} \leqslant \sum_{s=1}^{n} \frac{\left[s\left(\ln\frac{3}{2} + \varepsilon\right)\right]^{2s+k-1}}{(2s+k-1)!} \left(\frac{3}{2} + \varepsilon\right)^s.$$

Несложные вычисления показывают, что в этом случае

$$S_1' < 0.193; \quad S_2' < 0.029; \quad S_3' < 0.0034 \text{ и т. д.}$$

Если учесть, что $P(z^{\alpha_0}) = \frac{e^{-C}}{\ln z^{\alpha_0}}\left(1 + \frac{7\theta}{\ln z^{\alpha_0}}\right)$, где C—эйлерова постоянная, то мы получим формулу:

$$B_k[z, \alpha_0, \alpha] = \frac{e^{-C}}{\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_\delta}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha_0 \ln z}\left\{1 + (-1)^k \theta S_k''\right\},$$

где разность $S_k'' - S_k'$ меньше любой наперед заданной сколь угодно малой положительной константы при достаточно большом z.

Поступило
19 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Viggo Brun, Kidenskapsselskapets Skrifter, I, Mat.-Naturv. Klasse, № 3 (1920). [2] Mertens, Journal für reine und angewandte Mathematik, 78 (1874).