Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Академик АН УССР Г. В. ПФЕЙФФЕР

ОБ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ОДНОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ФУНКЦИИ И ОДНОРОДНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

В настоящей статье мы остановимся на вопросе, который в основных руководствах не рассматривается и на который мало обращают внимания авторы многих научных работ.

Уравнение с частными производными первого порядка одной неизвестной функции

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{p_1}{p_n}, \frac{p_2}{p_n}, \ldots \frac{p_{n-1}}{p_n}\right)=0 \qquad (1)$$

обладает полными интегралами Lagrange'а трех видов:

A) Интегралом без произвольного постоянного множителя и без добавочной произвольной постоянной

$$z=\Phi(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_n),$$

$$J=\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n)}{D(a_1, a_2, \ldots a_n)}\equiv 0,$$

$$J_k=\frac{D(\Phi, \Phi_1, \ldots \Phi_{k-1}, \Phi_{k+1}, \ldots \Phi_n)}{D(a_1, a_2, \ldots a_n)}\not\equiv 0,$$

k — одно из чисел $1, 2, \ldots n$, (2)

$$J_{kj}=\frac{D(\Phi_1, \ldots \Phi_{k-1}, \Phi_{k+1}, \ldots \Phi_n)}{D(a_1, \ldots a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots a_n)}\not\equiv 0,$$

j — одно из чисел $1, 2, \ldots n$,

$$R_\tau^n=\frac{D\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_n}, \frac{\Phi_2}{\Phi_n}, \ldots \frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n}\right)}{D(a_1, \ldots a_{\tau-1}, a_{\tau+1}, \ldots a_n)}\equiv 0$$

для всех $\tau=1, 2, \ldots n$.

B) Интегралом без произвольного постоянного множителя и с добавочной произвольной постоянной

$$z=\theta(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_{n-1})+a_n,$$

$$L_k=\frac{D(\theta_1, \dots \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \dots \theta_n)}{D(a_1, a_2, \dots a_{n-1})}\neq 0,$$

k — одно из чисел $1, 2, \dots n$, (3)

$$L=\frac{D\left(\frac{\theta_1}{\theta_n}, \frac{\theta_2}{\theta_n}, \dots \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}\right)}{D(a_1, a_2, \dots a_{n-1})}\equiv 0.$$

C) Интегралом с произвольным постоянным множителем и с добавочной произвольной постоянной — интегралом A. Mayer'a [1]

$$z=a_{n-1}\varphi(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_{n-2})+a_n,$$

$$N_k=\frac{D\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_n}, \dots \frac{\varphi_{k-1}}{\varphi_n}, \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_n}, \dots \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}\right)}{D(a_1, a_2, \dots a_{n-2})}\neq 0, \tag{4}$$

k — одно из чисел $1, 2, \dots (n-1)$.

По интегралу A)

$$z=\Phi(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_j, \dots a_n) \tag{5}$$

нетрудно построить интеграл B)

$$z=\theta(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_{j-1}, a_{j+1}, \dots a_n)+\text{const}, \tag{6}$$

стоит только в интеграле (5) произвольную постоянную a_j заменить определенным, произвольно взятым количеством d и к функции Φ прибавить произвольную постоянную

$$\begin{aligned} z&=\Phi(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_{j-1}, d, a_{j+1}, \dots a_n)+\text{const} \\ &=\theta(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_{j-1}, a_{j+1}, \dots a_n)+\text{const}. \end{aligned} \tag{7}$$

Условия, связанные с интегралом (5), перейдут в условия, принадлежащие интегралу (6) [2].

В интеграле B)

$$z=\theta(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_i, \dots a_{n-1})+a_n \tag{8}$$

всегда существует произвольная постоянная a_i, их может быть несколько, замена которой определенным, произвольно взятым количеством d позволяет составить интеграл C)

$$z=a_0\,\theta(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_{i-1}, d, a_{i+1}, \dots a_{n-1})+a_n \text{ [3]}. \tag{9}$$

Интегралу C)

$$z=a_{n-1}\varphi(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_{n-2})+a_n \tag{10}$$

соответствует интеграл S. Lie первого класса

$$z=\text{const}, \quad \varphi=\text{const} \text{ [4]}. \tag{11}$$

По интегралу (11), что то же, по интегралу (10) непосредственно строим интегралы [5]:

A) $$z=\Phi(\varphi, a_{n-1}, a_n), \tag{12}$$

где Φ — определенная, произвольно взятая функция аргументов, не содержащая добавочной произвольной постоянной, удовлетворяющая одному из условий

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\,\partial a_n} \neq 0, \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial a_n}}{\frac{\partial\Phi}{\partial a_{n-1}}}\right) \neq 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\,\partial a_{n-1}} \neq 0, \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial a_n}}{\frac{\partial\Phi}{\partial a_{n-1}}}\right) \neq 0 \tag{14}$$

или тому и другому;

B)
$$z = \theta(\varphi, a_{n-1}) + a_n, \tag{15}$$

где θ — определенная, произвольно взятая функция аргументов, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\,\partial a_{n-1}} \neq 0. \tag{16}$$

Поступило
10 III 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Mayer, Math. Ann., III (1877). [2] Г. Пфейффер, Зап. фіз.-мат. відд. УАН, IV (1929); Bull. des Sci. Math., LIII, S. 2 (1929). [3] Г. Пфейффер, Зап. фіз.-мат. відд. УАН, V (1931); Math. Ann., 104 (1931). [4] Г. Пфейффер, Зап. фіз.-мат. відд. УАН, IV (1929); Ann. de Toulouse, XXII, S. 3 (1930). [5] Ibidem.