Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 9

МЕХАНИКА

П. М. РИЗ

ИЗГИБ РАСТЯНУТОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 31 I 1939)

В некоторых технических задачах, как например в расчете лопастей воздушных винтов, приходится рассматривать изгиб стержня, сильно растянутого вдоль его оси. Задача о совместном действии нагрузок различного характера и о взаимодействии вызываемых ими деформаций неразрешима в рамках линейной теории упругости, в которой принцип суперпозиции исключает возможность такого взаимодействия.

Мы будем здесь пользоваться методами нелинейной теории упругостей, изложенными в совместной работе Н. В. Зволинского и автора этой статьи ([1]), причем нам понадобятся следующие результаты:

1. Деформация определяется компонентами тензора деформаций, отнесенными к деформированному состоянию, по формулам, впервые введенным Файлоном:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{xx}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{xy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \end{array}\right\}. \tag{1}$$

2. Для деформаций настолько малых, что не нарушается линейная зависимость между главными напряжениями и главными удлинениями, компоненты деформации связаны с напряжениями следующими формулами:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{xx}=\lambda I_1+[2\mu+(\lambda-2\mu)I_1]\,\varepsilon_{xx}+\dfrac{\lambda}{2}I_1^2-3\lambda I_2+5\mu\,(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{xz}^2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma_{xy}=[2\mu+(\lambda-2\mu)I_1]\,\varepsilon_{xy}+5\mu\,[\varepsilon_{xy}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})+\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}] \end{array}\right\}, \tag{2}$$

где I_1 и I_2 — инварианты тензора деформации.

3. Уравнения равновесия в напряжениях сохраняют классическую форму, но только производные берутся по координатам окончательного состояния.

Мы будем рассматривать призматический стержень длиной l,* закреп-

* Мы не будем здесь пользоваться допущениями о малости всех линейных размеров сечения стержня по сравнению с его длиной, так что излагаемая теория применима к расчету призматического тела, близкого например к пластинке.

ленный в одном сечении, к свободному торцевому сечению которого приложены нагрузки, параллельные оси стержня, сводящиеся к растягивающей силе P и изгибающей паре M_0. Пусть a, b и c — декартовы координаты точек стержня в недеформированном состоянии. Зададимся следующими выражениями для перемещений:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\alpha\nu a + \frac{\beta}{2}\left[c^2 + \nu\left(a^2 - b^2\right)\right] + \alpha^2 u^{(1)} + \alpha\beta u^{(2)} \\ v &= -\alpha\nu b + \beta\nu ab + \alpha^2 v^{(1)} + \alpha\beta v^{(2)} \\ w &= \alpha c - \beta ac + \alpha^2 w^{(1)} + \alpha\beta w^{(2)} \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

представляющими наложение перемещений от растяжения и чистого изгиба с добавлениями некоторых дополнительных перемещений высшего порядка малости.

Здесь

$$\alpha = \frac{P}{ES} \quad \text{и} \quad \beta = -\frac{M_0}{EI},$$

константу β мы считаем малой в классическом смысле, о величине α мы этого предполагать не будем.

Всюду будем удерживать члены порядка $\alpha\beta$ и α^2 и пренебрегать членами высшего порядка малости. Такая постановка задачи соответствует малой деформации чистого изгиба, сопровождаемой сильным растяжением вдоль оси.

Координата c отсчитывается по оси стержня, a — в направлении изгиба, производимого в главной плоскости, b — перпендикулярно к первым двум осям. z, x и y — соответствующие координаты в деформированном состоянии.

По формулам (1), а затем (2) определяем напряжение:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \alpha^2\sigma_{xx}^{(1)} + \alpha\beta\sigma_{xx}^{(2)} \\ \sigma_{yy} &= \alpha^2\sigma_{yy}^{(1)} + \alpha\beta\sigma_{yy}^{(2)} \\ \sigma_{zz} &= -E\left(-\alpha + \beta a\right) + 2\nu E\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta a\right) + \alpha^2\sigma_{zz}^{(1)} + \alpha\beta\sigma_{zz}^{(2)} \\ \sigma_{xy} &= \alpha^2\sigma_{xy}^{(1)} + \alpha\beta\sigma_{xy}^{(2)} \\ \sigma_{xz} &= \frac{E}{2}\alpha\beta c + \alpha^2\sigma_{xz}^{(1)} + \alpha\beta\sigma_{xz}^{(2)} \\ \sigma_{yz} &= \alpha^2\sigma_{yz}^{(1)} + \alpha\beta\sigma_{yz}^{(2)}. \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Напишем уравнение равновесия, условия того, что боковая поверхность свободна от напряжений, и условия на торцевой поверхности, выражающие требования сводимости напряжений к осевой силе P и изгибающей паре с моментом M_0.

Требуя тождественного выполнения этих условий при любых значениях параметров α и β, мы придем к следующим краевым задачам для определения дополнительных напряжений.

1) Задача для определения $\sigma_{xx}^{(1)}$ и пр.

Уравнения равновесия:

$$L_1^{(1)} = 0; \quad L_2^{(1)} = 0; \quad L_3^{(1)} = 0.$$

Условия на боковой поверхности:

$$M_1^{(1)} = 0; \quad M_2^{(1)} = 0; \quad M_3^{(1)} = 0.$$

Здесь

$$L_1^{(1)} = \frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial a} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial b} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial c} \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$M_1^{(1)} = \sigma_{xx} \cos \nu x + \sigma_{xy} \cos \nu y + \sigma_{xz} \cos \nu z.$$

На торцевой поверхности:

$$2\nu ES \iint \sigma_{zz}^{(1)} da\, db = \iint a\sigma_{zz}^{(1)} da\, db = \iint b\sigma_{zz}^{(1)} da\, db = 0.$$

2) Задача для определения $\sigma_{xx}^{(2)}$ и пр.

$$L_1^{(2)} = -\frac{E}{2}; \quad L_2^{(2)} = 0; \quad L_3^{(2)} = 0.$$

$$M_1^{(2)} = 0; \qquad M_2^{(2)} = 0; \quad M_3^{(2)} = \frac{E}{2} c \frac{\partial f}{\partial a}$$

[$f(a, b) = 0$ — уравнение недеформированной боковой поверхности].

Эта задача подстановкой

$$\sigma_{xz}^{(2)} = \frac{E}{2} c + \bar{\sigma}_{xz}^{(2)}$$

легко приводится к задаче изгиба стержня под действием своего веса, с уравнениями:

$$\bar{L}_1^{(2)} = -E; \quad \bar{L}_2^{(2)} = 0; \quad \bar{L}_3^{(2)} = 0;$$

$$\bar{M}_1^{(2)} = 0; \qquad \bar{M}_2^{(2)} = 0; \quad \bar{M}_3^{(2)} = 0$$

и с условиями в торцевом сечении:

$$\iint \bar{\sigma}_{xz}^{(2)} da\, db + ElS = 0.$$

$$\iint a\bar{\sigma}_{zz}^{(2)} da\, db = 0.$$

Последняя задача легко приводится к плоской; для случая эллиптического сечения имеется частное решение (неудовлетворяющее, правда, условиям на свободном сечении), принадлежащее Пирсону и Файлону (2). Мы проводим дальнейшие выкладки для этого частного случая, пользуясь результатами упомянутой работы, изменяя их в соответствии с условиями на торце. Приводим окончательные выражения для напряжений:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \alpha\beta \frac{2\mu}{3A^2} \left\{ (A^2 - a^2)\, k_1 a - k_2 a b^2 \right\} \\
\sigma_{yy} &= \alpha\beta \frac{2\mu}{3A^2} \left\{ (B^2 - b^2)\, k_3 a - k_4 a^3 \right\} \\
\sigma_{xy} &= \alpha\beta \frac{2\mu}{3A^2} \left\{ (B^2 - b^2)\, k_5 b - k_6 a^2 b \right\} \\
\sigma_{yz} &= \alpha\beta \frac{8\mu}{A^2} k_7 (c + m_1)\, ab \\
\sigma_{xz} &= \alpha\beta \left\{ Ec + \frac{2\mu (c + m_1)}{A^2} [(a^2 - A^2)\, k_8 - b^2 k_9] \right\} \\
\sigma_{zz} &= E\alpha - \beta E a + \alpha\beta \left\{ \frac{2E}{A^2} (l^2 - c^2) - \frac{\mu}{3} k_{10} - 4\nu E - \right. \\
&\quad \left. - \frac{4E}{A^2} m_1 c + m_2 - (a^2 - 3b^2) \frac{2\mu}{A^2} k_{11} + \frac{4\mu}{3A^2} a^2 (2 + \nu) \right\} a.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Здесь A и B — полуоси эллипса, $\varepsilon = \frac{B}{A}$, k_i и m_i — некоторые константы, значения которых мы здесь не приводим.

Выписываем здесь асимптотические выражения этих формул при ε, стремящемся к бесконечности. Получим:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 0 \\
\sigma_{yy} &= \alpha\beta\,(B^2 - b^2)\,\frac{2\mu}{5A^2}\,(7\nu - 1)\,a \\
\sigma_{xy} &= -\alpha\beta\,\frac{2\mu}{5A^2}\,(1 + 3\nu)\,\varepsilon^2 a^2 b \\
\sigma_{xz} &= \alpha\beta\left\{Ec + \frac{4\mu}{A^2}\,a^2\left(c - l\,\frac{1-2\nu}{2-\nu}\right) + \frac{4\mu\,(1-2\nu)}{B^2}\,b^2\left(c - l\,\frac{1-2\nu}{2-\nu}\right)\right\} \\
\sigma_{yz} &= \alpha\beta\,\frac{8\mu\nu}{A^2}\left(c - l\,\frac{1-2\nu}{2-\nu}\right) \\
\sigma_{zz} &= E\alpha - \beta E a + \alpha\beta\left\{\frac{2E}{A^2}\,(l^2 - c^2) - \frac{4E}{A^2}\,l\,(l - c)\,\frac{1-2\nu}{2-\nu} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\mu}{A^2}\,(11\nu + 3\nu^2)\left(3b^2 - \frac{B^2}{15}\right)\right\} a.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

При обычном расчете изогнуто-растянутых стержней, бесконечно тонких в смысле Кирхгофа, единственным определяемым, с помощью некоторых гипотез, напряжением является σ_{zz}.

Соответствующая формула в наших обозначениях запишется:

$$\sigma_{zz} = E\alpha - \beta E a + \alpha\beta\,\frac{2E}{A^2}\,(l^2 - c^2)\,a. \qquad (7)$$

Несмотря на практическую малость величин α и β можно видеть, что если A будет весьма мало по сравнению с l и B, то напряжения, получаемые из формул (6), будут весьма значительны, да и напряжение σ_{zz} будет заметно отличаться от даваемого формулой (7).

Перемещения легко могут быть получены обычными методами и мы их здесь не приводим.

В заключение приношу глубокую благодарность Н. В. Зволинскому за ценные советы.

Центральный аэрогидродинамический
институт.
Москва.

Поступило
1 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Зволинский и П. М. Риз, Изв. Акад. Наук СССР, сер. техн. наук, № 8—9 (1938). [2] Pearson a. Filon, The Quarterly Journal of Mathematics, XXXI, p. 66 (1900).