Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. М. РИЗ

ДЕФОРМАЦИИ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 II 1939)

Мы рассматриваем здесь деформации естественно закрученных стержней, т. е. таких стержней, у которых в ненапряженном состоянии поперечные сечения повернуты друг относительно друга. Ось стержня мы считаем прямолинейной и проходящей через центры тяжести сечений. В случае, когда линейные размеры поперечного сечения малы по сравнению с его длиной (так наз. тонкие стержни), деформации такого стержня исследовались, исходя из общей теории тонких стержней Кирхгофа, однако в этой теории фактически постулируется независимость кручения от растяжения и независимость крутильных деформаций от естественной закрученности. Первое утверждение явно опровергается опытом, указывающим на явление раскручивания стержня при его растяжении. Это явление впервые было обследовано в работе Вуд и Перринг (1), однако дополнительные гипотезы, сформулированные в их работе, противоречат общим уравнениям теории упругости, а именно Вуд и Перринг предполагали касательные напряжения в деформированном сечении такими, как если бы стержень раскручивался некоторой крутящей парой, а нормальные такими, как при чистом растяжении.

Мы отказываемся здесь от требования малости линейных размеров поперечного сечения по сравнению с его длиной, поэтому в этом смысле наши результаты являются более общими, нежели результаты, вытекающие из теории Кирхгофа. Мы не будем также пользоваться какими-либо гипотетическими соображениями о распределении напряжений.

В этой заметке, излагающей первую часть нашей работы, мы рассматриваем растяжение естественно закрученного стержня; в дальнейшем будут рассмотрены деформации кручения и изгиба естественно закрученных стержней, а также деформации закрученных сужающихся стержней.

а) Общие соотношения. Начало координат выбрано в центре тяжести одного из сечений, оси x и y направлены по главным осям этого сечения; ось z совпадает с осью стержня. Поворот сечений относительно некоторого начального определяем углом $\alpha(z)$.

Кроме того рассмотрим местную систему координат ξ, η, ζ; оси ξ и η совпадают с главными осями каждого сечения, ось ζ совпадает с осью стержня.

Легко получить следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ \eta &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ \zeta &= z \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\alpha\frac{\partial}{\partial\xi} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial\eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\xi} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial\eta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{d\alpha}{dz}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Уравнение боковой поверхности запишется $f(\xi, \eta) = 0$ либо

$$f(x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha) = 0.$$

Мы полагаем $\alpha(z) = \theta z$. Величину θ, называемую естественной круткой, будем считать малой постоянной величиной и поставим себе задачей решение уравнений теории упругости с точностью до θ^2, проводя все выкладки с той же точностью.

б) Растяжение силой, приложенной на конце стержня. Рассмотрим деформацию стержня под действием растягивающих усилий, распределенных на торце и статически эквивалентных силе P, параллельной оси стержня и приложенной в центре тяжести торцевого сечения площадью S.

Зададимся следующими выражениями для напряжений:

$$\sigma_{zz} = p + p\theta\sigma_{zz}^{(1)}; \quad \sigma_{xx} = p\theta\sigma_{xx}^{(1)}; \quad \sigma_{yy} = p\theta\sigma_{yy}^{(1)}; \quad \sigma_{xy} = p\theta\sigma_{xy}^{(1)};$$

$$\sigma_{xz} = p\theta\sigma_{xz}^{(1)}; \quad \sigma_{yz} = p\theta\sigma_{yz}^{(1)}; \quad \left(p = \frac{P}{S}\right),$$

где $\sigma_{zz}^{(1)}$ и пр.—искомые функции от координат ξ; η; ζ. Для добавочных напряжений получаем следующие уравнения равновесия

$$L_1^{(1)} = 0; \quad L_2^{(1)} = 0; \quad L_3^{(1)} = 0,$$

где

$$L_1^{(1)} = \frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial\eta} + \frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial\zeta},$$

. . . .

и граничные условия, выражающие отсутствие напряжений на боковой поверхности

$$M_1^{(1)} = 0; \quad M_2^{(1)} = 0; \quad M_3^{(1)} + (\xi f'_\eta - \eta f'_\xi) = 0,$$

где

$$M_1^{(1)} = \sigma_{xx}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{xy}^{(1)} f'_\eta \ \ldots\ M_3^{(1)} = \sigma_{xz}^{(1)} f'_\xi + \sigma_{yz}^{(1)} f'_\eta.$$

Мы удовлетворим всем этим условиям, а также условиям совместности, если примем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} &= \eta + k(\varphi'_\xi - \eta) \\ \sigma_{yz}^{(1)} &= -\xi + k(\varphi'_\eta + \xi) \\ \sigma_{xx}^{(1)} &= \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Здесь $\varphi(\xi, \eta)$ — функция кручения для профиля $f(\xi, \eta) = 0$. Константу k определим из равенства нулю крутящего момента в поперечном сечении; в результате несложных выкладок найдем $k = \frac{I_p}{T}$, где I_p — полярный момент инерции, а T — геометрическая жесткость на кручение.

Для перемещений найдем, что кроме обычных перемещений, вызываемых растяжением, имеет место некоторая раскрутка стержня. Приводим добавочные перемещения:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{p\theta}{\mu}\left(\frac{I_p}{T}-1\right)yz \\ v &= \frac{p\theta}{\mu}\left(\frac{I_p}{T}-1\right)xz \\ w &= \frac{p\theta}{\mu}\frac{I_p}{T}\varphi(\xi,\eta) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(μ — модуль сдвига).

Для угла поворота на единицу длины (τ) получим формулу:

$$\tau = \frac{p\theta}{\mu}\left(\frac{I_p}{T}-1\right). \tag{5}$$

Формула Вуда и Перринга в наших обозначениях дает $\tau = \frac{p\theta}{\mu}\,\frac{I_x - I_y}{T}$ для тонких сечений, у которых $I_x \gg I_y$; формула Вуда и Перринга близка к нашей, но если $I_y > I_x$, то она дает нелепый результат (дальнейшее закручивание вместо раскрутки).

в) Растяжение массовыми силами постоянной интенсивности. Обозначая интенсивность массовых сил через ρ, зададимся следующими выражениями для напряжений:

$$\begin{aligned} &\sigma_{zz} = \rho z + \rho\theta\sigma_{zz}^{(1)}, && \sigma_{xy} = \rho\theta\sigma_{xy}^{(1)}, \\ &\sigma_{xx} = \rho\theta\sigma_{xx}^{(1)}, && \sigma_{xz} = \rho\theta\sigma_{xz}^{(1)}, \\ &\sigma_{yy} = \rho\theta\sigma_{yy}^{(1)}, && \sigma_{yz} = \rho\theta\sigma_{yz}^{(1)}. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия:

$$L_1^{(1)} = 0; \quad L_2^{(1)} = 0; \quad L_3^{(1)} = 0.$$

Граничные условия:

$$M_1 = 0; \quad M_2 = 0; \quad M_3 + \zeta(\xi f'_\eta - \eta f'_\xi) = 0.$$

Уравнениям равновесия и третьему граничному условию мы удовлетворим, положив:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{xz}^{(1)} = \eta\zeta + k\zeta(\varphi'_\xi - \eta) && \sigma_{xx}^{(1)} = \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} - \xi\eta - k(\varphi - \xi\eta) \\ &\sigma_{yz}^{(1)} = -\xi\zeta + k\zeta(\varphi'_\eta + \xi) && \sigma_{yy}^{(1)} = \frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \xi\eta - k(\varphi + \xi\eta) \\ &\sigma_{zz}^{(1)} = 2k\varphi + \nabla^2 F\nu + C + A\xi + B\eta; && \sigma_{xy}^{(1)} = -\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta} \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Постоянную k определяем из прежних соображений и получаем для нее то же значение $k = \frac{I_p}{T}$; A, B и C определим из условий $\iint\sigma_{zz}^{(1)}d\xi d\eta = 0$; $\iint\xi\sigma_{zz}^{(1)}d\xi d\eta = \iint\eta\sigma_{zz}^{(1)}d\xi d\eta = 0$.

Из условий совместности и двух первых граничных условий находим, что $F(\xi, \eta)$ есть бигармоническая функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} - \xi\eta - k(\varphi - \xi\eta)\right]f'_\xi - \frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta}f'_\eta = 0,$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta}f'_\xi + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \xi\eta - k(\varphi + \xi\eta)\right]f'_\eta = 0.$$

Перемещения слагаются из трех частей: обычных перемещений, вызываемых растягивающими силами, некоторых перемещений, дающих плоскую деформацию, и кроме того раскручивания. Приводим только последние слагаемые:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\rho\theta}{\mu}\left(\frac{I_p}{T}-1\right)\frac{yz^2}{2} \\ v &= \frac{\rho\theta}{\mu}\left(\frac{I_p}{T}-1\right)\frac{xz^2}{2} \\ w &= \frac{\rho\theta}{\mu}\frac{I_p}{T}\varphi(\xi,\eta)\,z \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Для раскрутки получаем:

$$\tau = \frac{p\theta}{\mu}\left(\frac{I_p}{T}-1\right)z. \tag{8}$$

Для некоторых контуров поперечных сечений дополнительная плоская деформация также легко определяется; так например, для эллиптического сечения с полуосями a и b

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{a^2-b^2}{6}\xi\eta + \frac{a^2-b^2}{12}\left(1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}\right)\xi\eta \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = 0; \qquad \sigma_x = \frac{\rho\theta}{4}(a^2-b^2)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1\right) \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Соответствующих перемещений мы уже не приводим.

г) Случай переменной естественной крутки (сила приложена на конце). Рассмотрим случай, когда угол поворота сечений в ненапряженном состоянии определяется следующим законом:

$$\alpha(z) = \theta_1 \frac{z^2}{2}.$$

Уравнения равновесия и граничные условия полностью совпадают с условиями задачи (c), и окончательные результаты можно получить заменой в формулах предыдущего параграфа $\rho\theta$ на $p\theta_1$. Без труда можно рассмотреть случай, когда

$$\alpha(z) = \theta z + \theta_1 \frac{z^2}{2}.$$

В этом случае дополнительные напряжения и перемещения получаются наложением соответствующих величин для задачи с постоянной круткой и с круткой $\theta_1 z$.

Мы выписываем здесь только формулу для раскрутки

$$\tau = \frac{p}{\mu}\left(\frac{I_p}{T}-1\right)(\theta+\theta_1 z) = \frac{p}{\mu}\left(\frac{I_p}{T}-1\right)\frac{d\alpha}{dz}. \tag{10}$$

Поступило
21 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Wood a. Perring, Stresses and Strains in Airscrews with Particular References to Twist. Rep. and Mem., № 1274 (1929).