Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 9

МЕХАНИКА

Н. ЗВОЛИНСКИЙ

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ РАСТЯНУТОГО И ЗАКРУЧЕННОГО БРУСА

(Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 31 I 1939)

В ранее опубликованной (1) совместно с П. М. Риз работе было найдено первое приближение в решении задачи о кручении бруса, растянутого силами, приложенными к его концам. Для некоторых приложений представляет интерес подобная же задача, но в предположении массовых растягивающих сил. Мы даем ниже решение такой задачи в первом приближении для простейшего случая массовых сил постоянной интенсивности.

В основу решения положены точные соотношения между компонентами напряжения и производными от смещений, а также зависимости между компонентами напряжений и деформаций, справедливые с точностью до членов второго порядка включительно (2).

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{xx}=\lambda I_1+[2\mu+(\lambda-2\mu)I_1]\varepsilon_{xx}+\frac{\lambda}{2}I_1^2-3\lambda I_2+5\mu(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{xz}^2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{xy}=[2\mu+(\lambda-2\mu)I_1]\varepsilon_{xy}+5\mu[\varepsilon_{xy}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})+\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Здесь через $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy} \ldots \varepsilon_{zz}$ обозначены компоненты деформации, отнесенные к прямоугольным декартовым координатам, через $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \ldots \sigma_{zz}$ — соответствующие компоненты напряжения. При этом, как и раньше, пришлось сделать из-за отсутствия более точных экспериментальных данных предположение, что существует некоторый конечный интервал, внутри которого при трехстороннем растяжении имеет место линейная зависимость между напряжениями и удлинениями.

Координаты некоторой точки до деформации обозначаем a, b, c; ее же координаты после деформации — x, y, z. Эти координаты связаны между собой при помощи компонент смещения u, v, w:

$$x=a+u, \quad y=b+v, \quad z=c+w.$$

Величины (компоненты напряжения и деформации), отнесенные к состоянию после деформации, отмечаем индексами x, y, z.

Расположим начало координат в центре тяжести одного из оснований цилиндра, ось Oz направим параллельно образующим его, оси Ox и Oy — по главным осям сечения. Ограничимся ради простоты вычислений случаем сечения, имеющего две оси симметрии. Поставим своей задачей найти напряженное состояние цилиндра при следующих условиях:

а) на точки цилиндра действует массовая нагрузка, интенсивность которой есть q, а направление параллельно оси Oz,

b) боковая поверхность свободна от напряжений,

с) на торцевой поверхности, которой до деформации соответствовала плоскость $c=o$, система внешних сил статически эквивалентна крутящей паре с моментом M.

Эта постановка задачи несет в себе элемент неопределенности, однако на основании принципа Сен-Венана для того, чтобы найти напряженное состояние вдали от концов, достаточно найти какое-либо частное решение поставленной задачи.

Решение ищем путем разложения смещений по степеням малых параметров α и τ:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\tau bc - \alpha\nu ac + \alpha\tau\cdot u_1 + \alpha^2\cdot u_2 \\ v &= \tau ac - \alpha\nu bc + \alpha\tau\cdot v_1 + \alpha^2\cdot v_2 \\ w &= \tau\varphi(a,\,b) + \frac{\alpha}{2}\left[c^2 + \nu a^2 + \nu b^2\right] + \alpha\tau\cdot w_1 + \alpha^2\cdot w_2 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Функции u_1, v_1, w_1, равно как u_2, v_2, w_2, подлежат определению; $\varphi(a,b)$ — функция кручения, ν — коэффициент Пуассона, параметры α и τ имеют значения:

$$\tau = \frac{M}{\mu T_0};\quad \alpha = \frac{q}{2\mu(1+\nu)},$$

где T_0 — геометрическая жесткость кручения. Члены с τ^2 в выражениях (2) опущены, что указывает на малость кручения.

Если через σ'_{xx}, $\sigma'_{xy} \ldots \sigma'_{zz}$ обозначить напряжения, которые получаются из перемещений u_1, v_1, w_1 по классическим формулам, а через σ''_{xx}, $\sigma''_{xy} \ldots \sigma''_{zz}$ — такие же напряжения, получаемые из перемещений u_2, v_2, w_2, то для напряжений поставленной нелинейной задачи с принятой точностью имеем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \alpha\tau\cdot\lambda\left[(1-2\nu)ab + \nu(a\varphi_a + b\varphi_b)\right] + \alpha^2\cdot\frac{\lambda\nu}{2}(a^2+2\nu b^2) + \\ &\qquad + \alpha\tau\cdot\sigma'_{xx} + \alpha^2\cdot\sigma''_{xx} \\ \sigma_{yy} &= -\alpha\tau\cdot\lambda\left[(1-2\nu)ab - \nu(a\varphi_a + b\varphi_b)\right] + \alpha^2\cdot\frac{\lambda\nu}{2}(2\nu a^2+b^2) + \\ &\qquad + \alpha\tau\cdot\sigma'_{yy} + \alpha^2\cdot\sigma''_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \alpha\cdot 2\mu(1+\nu)c + \alpha\tau\cdot\lambda(1-\nu)(a\varphi_a + b\varphi_b) + \\ &\qquad + \alpha^2\cdot\nu\left(\mu c^2 + \frac{\lambda}{2}(a^2+b^2)\right) + \alpha\tau\cdot\sigma'_{zz} + \alpha^2\cdot\sigma''_{zz} \\ \sigma_{xy} &= \alpha\tau\cdot\mu\nu(b^2-a^2) + \alpha^2\cdot\mu\nu^2 ab + \alpha\tau\cdot\sigma'_{xy} + \alpha^2\cdot\sigma''_{xy} \\ \sigma_{yz} &= \tau\mu(\varphi_b + a) + \alpha\tau\cdot\frac{\mu c}{2}\left[(3\nu-1)\varphi_b + (7\nu+1)a\right] - \\ &\qquad - \alpha^2\cdot\mu\nu(1+\nu)bc + \alpha\tau\cdot\sigma'_{yz} + \alpha^2\cdot\sigma''_{yz} \\ \sigma_{zx} &= \tau\mu(\varphi_a - b) + \alpha\tau\cdot\frac{\mu c}{2}\left[(3\nu-1)\varphi_a - (7\nu+1)b\right] - \\ &\qquad - \alpha^2\cdot\mu\nu(1+\nu)ac + \alpha\tau\cdot\sigma'_{zx} + \alpha^2\cdot\sigma''_{zx} \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Для определения напряжений $\sigma'_{xx} \ldots \sigma'_{zz}$ получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma'_{xx}}{\partial a} + \frac{\partial\sigma'_{xy}}{\partial b} + \frac{\partial\sigma'_{xz}}{\partial c} = \frac{\mu}{2}(1+\nu)b + \frac{\mu}{2}\cdot\frac{1-5\nu+2\nu^2}{1-2\nu}\varphi_a - \frac{\lambda}{2}(a\varphi_{aa} + b\varphi_{ab}) \\ &\frac{\partial\sigma'_{yx}}{\partial a} + \frac{\partial\sigma'_{yy}}{\partial b} + \frac{\partial\sigma'_{yz}}{\partial c} = -\frac{\mu}{2}(1+\nu)a + \frac{\mu}{2}\,\frac{1-5\nu+2\nu^2}{1-2\nu}\varphi_b - \frac{\lambda}{2}(a\varphi_{ab} + b\varphi_{bb}) \\ &\frac{\partial\sigma'_{zx}}{\partial a} + \frac{\partial\sigma'_{zy}}{\partial b} + \frac{\partial\sigma'_{zz}}{\partial c} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и граничных условий:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma'_{xx}\cos(na)+\sigma'_{xy}\cos(nb)+\lambda\left[(1-\nu)\,a\varphi_a+\nu b\varphi_b\right]\cos(na)+\\ &\qquad+\mu\nu\left[a\varphi_b+b\varphi_a\right]\cos(nb)=0\\ &\sigma'_{xy}\cos(na)+\sigma'_{yy}\cdot\cos(nb)+\mu\nu\,(a\varphi_b+b\varphi_a)\cos(na)+\\ &\qquad+\lambda\left[(1-\nu)\,b\varphi_b+\nu a\varphi_a\right]\cos(nb)=0\\ &\sigma'_{zx}\cos(na)+\sigma'_{zy}\cos(nb)+\mu c\,(b\cos(na)-a\cos(nb))=0 \end{aligned}\right\}. \quad (4')$$

Здесь $\cos(na)$, $\cos(nb)$ — направляющие косинусы первоначальной цилиндрической поверхности.

Кроме того напряжения $\sigma'_{xx}, \ldots \sigma'_{zz}$ должны удовлетворять классическим условиям совместности. Напряжения $\sigma''_{xx}, \ldots \sigma''_{zz}$ определяются из уравнений равновесия:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma''_{xx}}{\partial a}+\frac{\partial\sigma''_{xy}}{\partial b}+\frac{\partial\sigma''_{xz}}{\partial c}=\frac{\lambda}{2}\,(1-4\nu)\,a\\ &\frac{\partial\sigma''_{yx}}{\partial a}+\frac{\partial\sigma''_{yy}}{\partial b}+\frac{\partial\sigma''_{yz}}{\partial c}=\frac{\lambda}{2}\,(1-4\nu)\,b\\ &\frac{\partial\sigma''_{zx}}{\partial a}+\frac{\partial\sigma''_{zy}}{\partial b}+\frac{\partial\sigma''_{zz}}{\partial c}=2\mu\,(1+\nu+\nu^2)\,c \end{aligned}\right\}, \quad (5)$$

условий совместности и следующих граничных условий:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma''_{xx}\cos(na)+\sigma''_{xy}\cdot\cos(nb)+\frac{\lambda\nu}{2}\,(a^2+2\nu b^2)\cos(na)+\mu\nu^2\cdot ab\cos(nb)=0\\ &\sigma''_{yx}\cdot\cos(na)+\sigma''_{yy}\cdot\cos(nb)+\mu\nu^2\cdot ab\cos(na)+\frac{\lambda\nu}{2}\,(2\nu a^2+b^2)\cos(nb)=0\\ &\sigma''_{zx}\cdot\cos(na)+\sigma''_{zy}\cdot\cos(nb)+\mu\nu\,(1+\nu)\,c\,(a\cos(na)+b\cos(nb))=0 \end{aligned}\right\}. \quad (5')$$

Обозначим через I_p полярный момент инерции поперечного сечения и величину $\frac{I_p}{T_0}$ через ω. Тогда для полных напряжений в результате решения задач (4), (4′) и (5), (5′) получим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx}&=\alpha\tau\cdot E\left\{\frac{\nu}{1+\nu}\,a\left(b-\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)+(\omega-1)\,ab-\omega\varphi+\frac{\partial^2F}{\partial b^2}\right\}-\alpha^2\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial b^2}\\ \sigma_{yy}&=\alpha\tau\cdot E\left\{-\frac{\nu}{1+\nu}\,b\left(a+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)-(\omega-1)\,ab-\omega\varphi+\frac{\partial^2F}{\partial a^2}\right\}-\alpha^2\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2}\\ \sigma_{zz}&=\alpha Ec+\alpha\tau\cdot E\left\{\frac{\nu}{1+\nu}\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial a}+b\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)+\nu\cdot\nabla^2F-\left(2\omega-\frac{1+3\nu}{2}\right)\varphi+\right.\\ &\left.+A'a+B'b+C'\right\}+\alpha^2\cdot\left\{\mu\nu^2(3+2\nu)\left(a^2+b^2-\frac{I_p}{S}\right)+\nabla^2\Phi+\mu\,(1+\nu)\,c^2\right\}\\ \sigma_{xy}&=\alpha\tau\cdot E\left\{\frac{\nu}{2(1+\nu)}\,b\left(b-\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)-\frac{\nu}{2\,(1+\nu)}\,a\left(a+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)-\frac{\partial^2F}{\partial a\partial b}\right\}+\alpha^2\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial a\partial b}\\ \sigma_{yz}&=\tau\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}+a\right)+\alpha\tau\cdot Ec\left\{\left(\frac{3\nu}{2\,(1+\nu)}-\omega\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial b}+a\right)+a\right\}\\ \sigma_{zx}&=\tau\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}-b\right)+\alpha\tau Ec\left\{\left(\frac{3\nu}{2\,(1+\nu)}-\omega\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}-b\right)-b\right\} \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

В этих формулах через $F(a, b)$ обозначена функция, удовлетворяющая бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 F=0$$

внутри области сечения и на контуре его условиям:

$$\frac{\partial F}{\partial a}=-\int_0^s\left[(\omega-1)\,ab+\omega\varphi\right]da,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b}=\int_0^s\left[(\omega-1)\,ab-\omega\varphi\right]db.$$

Через $\Phi(a, b)$ обозначена функция, удовлетворяющая внутри области сечения уравнению:

$$\nabla^4\Phi = 8\varkappa, \quad \varkappa = \frac{\mu\nu^2}{4(1-\nu^2)}(1 - 5\nu - 4\nu^2)$$

и на границе условиям:

$$\Phi = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$$

$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right.$ — производная по нормали к контуру$\left.\right)$.

Величины A', B', C' в формулах (6) — постоянные, определяемые из условий равенства нулю проекции на ось Oz главного вектора внешних сил, приложенных на свободной торцевой поверхности, и из равенства нулю моментов этих сил относительно осей Ox и Oy.

Из формулы (6) можно сделать заключение, что добавочные напряжения, полученные за счет введения нелинейных членов, вообще говоря, весьма малы, ибо порядок их по отношению к основным напряжениям можно выразить числом αl, причем

$$\alpha l = \frac{ql}{2\mu(1+\nu)} = \frac{\sigma}{E} \leqslant \frac{\text{предел пропорциональности}}{\text{модуль Юнга.}}$$

Однако могут встретиться случаи, когда добавочные напряжения оказываются сравнимыми с основными напряжениями. Это будет например тогда, когда величина ω, входящая в формулы (6), становится большой. Это обстоятельство имеет место для тонких сечений, для которых ω может быть сделана сколь угодно большой соответственным уменьшением толщины. В заключение я выражаю благодарность П. М. Риз за совместное обсуждение ряда вопросов.

Центральный аэрогидродинамический институт.
Москва.

Поступило
1 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Зволинский и П. М. Риз, ДАН, XX, № 2—3 (1938). [2] Н. В. Зволинский и П. М. Риз, Известия Акад. Наук СССР, сер. техн. наук, № 8—9 (1938).