Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 1

МЕХАНИКА

В. В. СОКОЛОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ДАВЛЕНИЯ ЗЕМЛИ

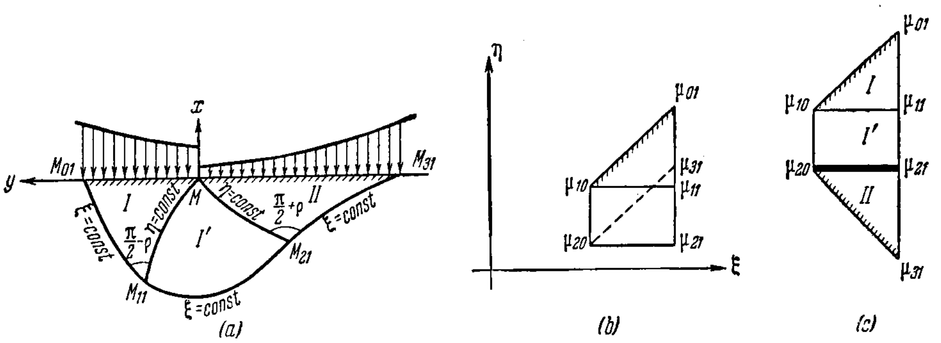
(Представлено академиком И. М. Виноградовым 13 II 1939)

В нашей статье, напечатанной в «Докладах», т. XXII, № 4, мы привели основные уравнения* и ряд соотношений, необходимых для решения задач теории давления земли**. Там же было дано решение задачи о давлении земли на подпорную стенку.

Рассмотрим теперь другую задачу, которую мы назовем обобщенной задачей Prandtl'я.

Вдоль участка $M_{01}M$ задана нормальная нагрузка, требуется определить наименьшую нормальную нагрузку, препятствующую выпиранию земли вдоль MM_{31}.

Для частного случая постоянной нагрузки при отсутствии массовых сил эта задача была решена Prandtl'ем и Reissner'ом.



Рассмотрим случай, когда $\sigma'_x(y) > 0$ на участке MM_{01}, соответствующий монотонному возрастанию нагрузки вдоль оси y (фиг., a).

Сперва рассматриваем случай отсутствия массовых сил ($\overline{X} = \overline{Y} = 0$). Характеристиками в этом случае являются $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$.

Плоскость (ξ, η) состоит из двух листов, наложенных друг на друга.

На верхнем листе строим прямую (14') в виде $\mu_{01}\mu_{10}$, вдоль которой имеем (15) (фиг. b).

---

* Исправляем опечатку, вкравшуюся в эти уравнения, на стр. 154, № 4, т. XXII «Докладов». Следует читать:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\beta} - e^{-\frac{3\,\mathrm{tg}\,\rho\,(\xi+\eta)}{2}} \cdot Av = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\alpha} + e^{-\frac{3\,\mathrm{tg}\,\rho\,(\xi+\eta)}{2}} \cdot Bu = 0.$$

** Нумерация формул, на которые мы ссылаемся здесь в тексте, относится к формулам нашей статьи [1].

Решая задачу Cauchy для уравнений (6), определяем x, y в треугольнике $\mu_{01}\mu_{11}\mu_{10}$ и следовательно получим значения x, y вдоль $\mu_{10}\mu_{11}$.

На нижнем листе проводим прямую (14″). Точки пересечения ее с характеристиками $\xi = \text{const}$, проходящими через μ_{10} и μ_{01}, обозначим через μ_{20} и μ_{31}. Отрезку характеристики $\mu_{10}\mu_{20}$ соответствует на плоскости (x, y) одна точка M с координатами $(0, 0)$. Поэтому вдоль $\mu_{10}\mu_{20}$ положим $x = 0$, $y = 0$.

Решая задачу Goursat для уравнений (6), определяем x, y в прямоугольнике $\mu_{10}\mu_{20}\mu_{21}\mu_{11}$ на верхнем листе по значениям вдоль $\mu_{10}\mu_{11}$ и $\mu_{10}\mu_{20}$.

Склеим оба листа вдоль $\mu_{20}\mu_{21}$. Теперь x, y известны на нижнем листе вдоль $\mu_{20}\mu_{21}$, а вдоль $\mu_{20}\mu_{31}$ $x = 0$.

Решая смешанную задачу для уравнений (6), определяем

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

в треугольнике $\mu_{20}\mu_{21}\mu_{31}$.

Обращая эти функции, будем иметь:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y).$$

Подставив $\xi(0, y)$ в (14″), определим

$$\sigma(y) = e^{\operatorname{tg}\rho\left(2\xi - \frac{3\pi}{2} + \rho\right)},$$

а вслед за этим по (13″) получим

$$\sigma_x(y) = \sigma(y) \cdot (1 - \sin\rho) - \frac{K}{\sin\rho};$$

Значение σ_x в точке M справа (обозначено $[\sigma_x]_{M-}$) можно определить по значению σ_x в той же точке M слева (обозначено $[\sigma_x]_{M+}$).

Для этого по (13′) и (14′) определяем $\xi_{\mu_{10}}$ в виде

$$\xi_{\mu_{10}} = \frac{\operatorname{ctg}\rho}{2} \ln\left(\frac{[\sigma_x]_{M+} + \frac{K}{\sin\rho}}{1 + \sin\rho}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}.$$

По формулам (13″) и (14″) определяем:

$$\xi_{\mu_{20}} = \frac{\operatorname{ctg}\rho}{2} \ln\left(\frac{[\sigma_x]_{M-} + \frac{K}{\sin\rho}}{1 - \sin\rho}\right) + \frac{3\pi}{4} - \frac{\rho}{2}.$$

Использовав равенство

$$\xi_{\mu_{20}} = \xi_{\mu_{10}},$$

получим напряжение

$$[\sigma_x]_{M-} = \frac{1 - \sin\rho}{1 + \sin\rho}\left([\sigma_x]_{M+} + \frac{K}{\sin\rho}\right) e^{-\pi \operatorname{tg}\rho} - \frac{K}{\sin\rho},$$

зависящее лишь от величины напряжения σ_x в точке M слева, то же напряжение остается и в случае наличия массовых сил.

Рассмотрим далее случай наличия массовых сил. Характеристиками в этом случае являются $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$. Плоскость (α, β) состоит из двух листов, наложенных друг на друга.

В выборе α и β существует известный произвол, который нами будет использован.

На верхнем листе выберем α и β так, чтобы вдоль $M_{01}M$ они совпадали с (14′):

$$\alpha = \alpha(y) = \xi(y), \quad \beta = -\frac{\pi}{2} + \rho + \alpha.$$

Изображением этой кривой на верхнем листе (α, β) будет прямая $\mu_{01}\mu_{10}$, вдоль которой будем иметь (21) *.

Решая задачу Cauchy для уравнений (5), определим x, y и ξ, η в треугольнике $\mu_{01}\mu_{11}\mu_{10}$ и следовательно получим значения x, y и ξ, η вдоль $\mu_{10}\mu_{11}$ как функцию α.

На нижнем листе проводим прямую

$$\beta = -\frac{3\pi}{2} + \rho + \alpha,$$

точки пересечения которой с характеристиками $\alpha = \text{const}$, проходящими через μ_{10} и μ_{01}, обозначим через μ_{20} и μ_{31}. Вдоль отрезка характеристики $\mu_{10}\mu_{20}$ положим $\beta = \eta$, а так как кроме того отрезку $\mu_{10}\mu_{20}$ соответствует на плоскости (x, y) одна точка M с координатами $(0, 0)$ то вдоль $\mu_{10}\mu_{20}$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \eta = \beta, \quad \xi = \xi(0).$$

Решая задачу Goursat для уравнений (5), определяем x, y и ξ, η в прямоугольнике $\mu_{10}\mu_{20}\mu_{21}\mu_{11}$ на верхнем листе по значениям вдоль $\mu_{10}\mu_{11}$ и $\mu_{10}\mu_{20}$. Склеим оба листа вдоль $\mu_{20}\mu_{21}$.

Теперь x, y и ξ, η известны на нижнем листе вдоль $\mu_{20}\mu_{21}$, а вдоль $\mu_{20}\mu_{31}$

$$x = 0, \quad \eta = -\frac{3\pi}{2} + \rho + \xi.$$

Решая смешанную задачу для уравнений (5), определяем

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad \xi = \xi(\alpha, \beta), \quad \eta = \eta(\alpha, \beta)$$

в треугольнике $\mu_{20}\mu_{21}\mu_{31}$.

Обращая первые две из полученных функций, будем иметь

$$\alpha = \alpha(x, y), \quad \beta = \beta(x, y).$$

Вслед затем получим

$$\xi[\alpha(x, y), \beta(x, y)] = \xi_1(x, y), \quad \eta[\alpha(x, y), \beta(x, y)] = \eta_1(x, y).$$

Подставив $\xi_1(0, y)$ в (14″), определим

$$\sigma(y) = e^{\operatorname{tg}\rho\left(2\xi_1 - \frac{3\pi}{2} + \rho\right)},$$

а вслед за этим по (13″), получим

$$\sigma_x(y) = \sigma(y)(1 - \sin\rho) - \frac{K}{\sin\rho}.$$

Совершенно аналогично рассматриваются случаи $\sigma_x'(y) < 0$, $\sigma_x = \text{const}$, а также случай, когда заданная нагрузка состоит из нескольких участков, на каждом из которых она изменяется монотонно.

В последнем случае плоскости (ξ, η) и (α, β) будут многолистными.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
13 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Соколовский, ДАН, XXII, № 4 (1939).

* Построения на плоскости (α, β) совпадают с построениями на плоскости (ξ, η) изображенными на фигуре b и c.