Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 9

МАТЕМАТИКА

П. КОНТОРОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛУПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 I 1939)

В работе вводится понятие группы, являющейся полупрямым произведением двух своих подгрупп, и доказываются некоторые свойства такого произведения. Кроме того дано обобщение одной теоремы А. А. Кулакова (А. Кулаков, О некоторых свойствах конечных групп, Мат. сб., 1936).

§ 1. Группу G назовем полупрямым произведением двух своих подгрупп F и H, если F — нормальный делитель и произведение FH составляет всю группу G, причем F и H взаимно простые между собою. Полупрямое произведение обозначим через $G=F \times H$; F назовем прямым множителем, H — дополнительным. Частным случаем полупрямого произведения будет обычное прямое произведение $G=F\times H$.

Обозначим для любых двух систем элементов A, B группы G через $N(A,B)$ нормализатор A относительно B, т. е. множество всех элементов системы B, коммутирующих с системой A. Аналогично $Z(A,B)$ — централизатор A относительно B, т. е. множество всех элементов системы B, коммутирующих с каждым элементом системы A.

Очевидно:

$$N(A,B)=N(A)\frown B, \quad \text{где} \quad N(A)=N(A,G),$$
$$Z(A,B)=Z(A)\frown B, \quad \text{где} \quad Z(A)=Z(A,G).$$

Теорема. *Пусть* $G=F\curlyvee H$, *тогда*

$$N(H)=Z(H,F)\times H.$$

Доказательство.

1) $N(H)=HN(H,F)$. В самом деле, из $hf\in N(H)$ $h\in H$, $f\in F$ следует $f\in N(H)\frown F=N(H,F)$ или $N(H)\subset N(H,F)\,H$. С другой стороны, очевидно, что $N(H)\supset HN(H,F)$. Отсюда $N(H)=HN(H,F)$.

2) $N(H,F)$ — нормальный делитель из $N(H)$. В самом деле из $s\in N(H)$ имеем:

$$s^{-1}N(H,F)\,s\subset N(H)\frown F=N(H,F),$$

и так как

$$s^{-1}N(H,F)\,s\simeq N(H,F),$$

то

$$s^{-1}N(H,F)\,s=N(H,F).$$

3) $N(H,F)=Z(H,F)$. В самом деле, H и $N(H,F)$ взаимно простые между собою нормальные делители из $N(H)$ и поэтому перестановочны по-элементно между собою.

Таким образом окончательно $N(H)=H\times Z(H,F)$.

§ 2. Группу Φ назовем группой Фробениуса, если в Φ существует подгруппа H с нормализатором $N(H)=H$, и H к тому же взаимно простая со всеми своими сопряженными подгруппами, т. е. $H\frown H^{(g)}=1$, если g не лежит в $N(H)=H$, и $H\frown H^{(g)}=H$, если $g\in H$, где $H^{(g)}=g^{-1}Hg$, $g\in\Phi$.

Согласно известной теореме Фробениуса* в Φ существует нормальный делитель F; причем $F\frown H=1$ и индекс H равен порядку F. Очевидно $\Phi=F\curlyvee H$, т. е. Φ — полупрямое произведение с прямым множителем F и дополнительным H.

Лемма. Пусть $\Phi=F\curlyvee H$ — группа Фробениуса; тогда $N(h)\subset H$, где $h\neq 1$ — произвольный элемент из H.

Доказательство. Пусть $a\in N(h)$, т. е. $a^{-1}ha=h\in H\frown H^{(a)}=H$, отсюда $a\in H$.

Следствие. Пусть $\Phi=F\curlyvee H$ — группа Фробениуса с абелевым дополнительным множителем H, тогда $N(h)=H$, $h\neq 1\in H$.

Теорема. *$\Phi=F\curlyvee H$ — группа Фробениуса с абелевым дополнительным множителем H. Пусть $\Phi=F+Fh_2+\ldots+Fh_m\,(h_i\in H)$. Обозначим через $<h_i>$ — класс элементов, сопряженных с h_i.*

Тогда:

1) $<h_i>=Fh_i \quad h_i\neq 1$,

2) $<h_i><h_k>=<h_ih_k>$ при $h_ih_k\neq 1$

и $<h_i><h_k>=F$ при $h_ih_k=1$.

Доказательство.

1) $h_i^{-1}g^{-1}h_ig$ — коммутатор элементов h_i и g, где g — произвольный элемент из Φ.

Так как фактор-группа $\frac{\Phi}{F}\simeq H$ абелева, то $h_i^{-1}g^{-1}h_ig=f\in F$, т. е. $g^{-1}h_ig\subset Fh_i$ или $<h_i>\subset Fh_i$. Но** $O(<h_i>)=(G:N(h_i))=(G:H)=O(Fh_i)$.

Следовательно $<h_i>=Fh_i$.

2) $<h_i>=Fh_i$, $<h_k>=Fh_k$. Отсюда $<h_i><h_k>=Fh_i\cdot Fh_k=Fh_ih_k=<h_ih_k>$ при $h_ih_k\neq 1$ и $=F$ при $h_ih_k=1$.

Следствие. Если $\Phi=F\curlyvee H$ — группа Фробениуса с абелевым дополнительным множителем H: то

$$h^kg^{-1}h^ig\in<h^{i+k}>,\quad \text{если}\quad i+k\neq 0\quad h\in H$$

и

$$h^kg^{-1}h^ig\in F,\quad \text{если}\quad i+k=0\quad g\in G.$$

Примечание. Полученное следствие является обобщением следующей теоремы А. А. Кулакова***:

Пусть $H=\{h\}$ — циклическая подгруппа порядка p (p — простое число) группы G с нормализатором $N(H)=H$. Тогда h^{i+1} сопряжено с $hg^{-1}h^ig$, $h\in H, g\in G$, $i+1\neq 0$.

---

* См. Speiser, Theorie der Gruppen, § 63 (2-е изд.).

** $O(A)$ означает порядок, т. е. число элементов системы A.

*** А. Кулаков, О некоторых свойствах конечных групп, Матем. сб., I, № 2 (1936).

§ 3. Теорема. *Пусть $G = F \times H$ и $N(h) = H$ для любого элемента $h \neq 1$ из H, тогда G — группа Фробениуса с абелевым дополнительным множителем H.*

Доказательство. Из $N(h) = H$ следует, что H — абелева группа. Докажем, что $N(H) = H$.

Имеем

$$N(H) = H \times Z(H, F),$$

где

$$Z(H, F) = Z(h_1, F) \frown Z(h_2, F) \frown \ldots \frown Z(h_m, F).$$

Но $Z(h_i, F) = N(h_i, F) = 1$. Отсюда $N(H) = H$. Докажем, что H взаимно простое со всеми своими сопряженными подгруппами, не совпадающими с ней. В самом деле, $G = F + Fh_2 + \ldots Fh_m$.

Применив в точности рассуждения при доказательстве теоремы § 2, найдем $< h_i > = Fh_i$, $h_i \neq 1$.

Пусть теперь $H \frown g^{-1}Hg \neq 1$ при $H \neq g^{-1}Hg$.

Тогда имеем $h_i = g^{-1}h_2g$, и g не лежит в H, $h_1, h_2 \in H$.

Отсюда h_1, h_2 — элементы одного класса $< h_1 > = Fh_1$, т. е. $h_2 = fh_1$, $f \in F$ или $h_1^{-1}h_2 = f = 1$, т. е. $h_1 = h_2$. Отсюда $h_1 = g^{-1}h_1g$, т. е. $g \in N(h_1) = H$, вопреки допущению.

Таким образом G удовлетворяет условиям, характерным для группы Фробениуса с абелевым дополнительным множителем.

Индустриальный институт
имени С. М. Кирова.
Свердловск.

Поступило
31 I 1939.