Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

В. Д. КУПРАДЗЕ

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 2 II 1939)

Интегральные уравнения Фредгольма, встречающиеся в теории потенциала, часто оказываются с характеристическим значением параметра λ. Когда характеристическое число есть простой полюс резольвенты, как известно, можно путем несложных рассуждений довести до конца решение граничной задачи. В ряде простейших задач теории потенциала характеристическое число действительно есть простой полюс резольвенты (например внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа). Может быть поэтому, насколько нам известно, остался до сих пор нерассмотренным в литературе тот случай, когда характеристическое число интегрального уравнения есть кратный полюс резольвенты. Так как этот случай также может представить интерес для приложений, мы даем ниже способ решения граничных задач в этом случае. Для конкретности мы остановимся на рассмотрении задач Дирихле и Неймана для уравнения

$$\Delta u + k^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \tag{1}$$

встречающегося во многих вопросах математической физики.

Введем следующие обозначения: F — замкнутая конечная поверхность, удовлетворяющая известным условиям Ляпунова; P, Q — точки вне F; M, N — точки на F; r — расстояние между двумя точками; n_M, n_N — внешние нормали к поверхности F в точках M и N; k — постоянное положительное число; $\dfrac{e^{-ikr(P,Q)}}{r(PQ)}$ — решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ при фиксированном Q (или P) и переменном P (или Q); $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial n_N}\left(\dfrac{e^{-ikr(M,N)}}{r(M,N)}\right) = K(M,N)$; $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial n_M}\left(\dfrac{e^{-ikr(M,N)}}{r(M,N)}\right) = K(N,M)$; $\mu(N), \nu(N)$ — непрерывные функции точки N; $V(P) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_F \nu(N)\dfrac{e^{-ikr(N,P)}}{r(NP)}\cdot ds_N$ — потенциал простого слоя с плотностью $\nu(N)$; $W(P) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_F \mu(N)\dfrac{\partial}{\partial n_N}\left[\dfrac{e^{-ikr(N,P)}}{r(N,P)}\right]\cdot ds_N$ — потенциал двойного слоя с плотностью $\mu(N)$; $V_i(P)$, $V_e(P)$, $W_i(P)$, $W_e(P)$ — предельные значения $V(P)$ и $W(P)$, когда точка P приближается к граничной точке на F, оставаясь соответственно внутри F и вне F; $f(N)$, $\varphi(N)$ — заданные вдоль F непрерывные, конечные функции.

Внутренняя и внешняя задачи Дирихле D_i и D_e, если их решения искать в виде потенциала двойного слоя, приводят к интегральным уравнениям ([1]):

$$\mu(M) - \int_F \mu(N) K(M, N) \, ds_N = -f(M), \tag{D_i}$$

$$\mu(M) + \int_F \mu(N) K(M, N) \, ds_N = f(M). \tag{D_e}$$

Задачи Неймана N_i и N_e, если их решения искать в виде потенциалов простых слоев, приводят к уравнениям:

$$\nu(M) + \int_F \nu(N) K(N, M) \, ds_N = \varphi(M), \tag{N_i}$$

$$\nu(M) - \int_F \nu(N) K(N, M) \, ds_N = -\varphi(M). \tag{N_e}$$

Однородные интегральные уравнения, соответствующие (D_i), (D_e), (N_i), (N_e), будем обозначать (D_i^0), (D_e^0), (N_i^0), (N_e^0).

При исследовании этих интегральных уравнений существенную роль играет значение коэффициента k в уравнении (1); имеют место следующие теоремы ([1]):

Теорема 1. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\lambda = +1$ было характеристическим числом уравнения*

$$\mu(M) + \lambda \int_F \mu(N) K(M, N) \, ds_N = f(M), \tag{D_e}$$

есть равенство параметра k собственной частоте внутренней однородной задачи Неймана — N_i^0.

Ранг характеристического числа $\lambda = +1$ равен n кратности параметра k и линейные комбинации фундаментальных функций уравнения

$$\mu(M) + \int_F \mu(N) K(M, N) \, ds_N = 0 \tag{D_e^0}$$

дают контурные значения решений задачи N^0.

Теорема 2. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы $= -$ было характеристическим числом уравнения* (N_e)

$$\nu(M) + \lambda \int_F \nu(N) K(N, M) \, ds_N = -\varphi(M) \tag{N_e}$$

есть равенство параметра k собственной частоте внутренней однородной задачи Дирихле D_i^0. Ранг характеристического числа $\lambda = -1$ равен n кратности параметра k и линейные комбинации фундаментальных функций уравнения

$$\nu(M) - \int_F \nu(N) K(N, M) \, ds_N = 0 \tag{N_e^0}$$

представляют контурные значения нормальных производных решений задачи D_i^0.

Очевидно эти теоремы дают полное решение внешних задач Дирихле и Неймана, когда k не имеет ряд исключительных значений. В книге «Основные задачи математической теории диффракции» ([1]) я рассматривал случаи, когда k совпадает с собственными частотами задач D_i^0 и N_i^0, и дал способ решения задач в этом случае; при этом я отмечал, что способ имеет общее значение; на самом деле, как нетрудно видеть, он применим только к случаю, когда $\lambda = \pm 1$ есть простой полюс соответствующих резольвент*. В случае кратного полюса решение дается общей теорией канонических ядер. Исследование этого случая и составляет предмет настоящей статьи. Напомним основные положения теории канонических ядер.

Пусть $\lambda = +1$ есть полюс p-го порядка резольвенты уравнения (D_e);

$$\Gamma(M, N:\lambda) = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i(M,N)}{(1-\lambda)^{p-i+1}} + \sum_{i=p+1}^{\infty} A_i(M,N)(1-\lambda)^i. \tag{2}$$

Для фундаментальных функций уравнений (D_i^0), (N_i^0) введем обозначения:

$$\begin{gathered}
\overset{0}{\mu}_{11}, \overset{0}{\mu}_{21}, \ldots \overset{0}{\mu}_{q_1,1}; \mu^{(1)}_{q_1+1,1}, \mu^{(1)}_{q_1+2,1}, \ldots \mu^{(1)}_{q_2,1}; \mu^{(2)}_{q_2+1,1}, \mu^{(2)}_{q_2+2,1}, \ldots \mu^{(2)}_{q_3,1}; \ldots \mu^{(p-1)}_{q_{p-1}+1,1}, \\
\mu^{(p-1)}_{q_{p-1}+2,1}, \ldots \mu^{(p-1)}_{q_p=n,1} \\
\overset{0}{\nu}_{11}, \overset{0}{\nu}_{21} \ldots \overset{0}{\nu}_{q_1,1}; \nu^{(1)}_{q_1+1,1}, \nu^{(1)}_{q_1+2,1}, \ldots \nu^{(1)}_{q_2,1}; \nu^{(2)}_{q_2+1,1}, \nu^{(2)}_{q_2+2,1}, \ldots \nu^{(2)}_{q_3,1}; \ldots \nu^{(p-1)}_{q_{p-1}+1,1}, \\
\nu^{(p-1)}_{q_{p-1}+2,1} \ldots \nu^{(p-1)}_{q_p=n,1} \\
0 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdot \leqslant q_p = \lambda.
\end{gathered} \tag{3}$$

Коэффициенты $A_i(M, N)$ $(i = 1,2, \ldots p, p+1)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered}
A_1(M,N) + \int K(M,R)\, A_1(R,N)\, ds_R = 0 = A_1(M,N) + \int A_1(M,R)\, K(R,N)\, ds_R, \\
A_j(M,N) + \int K(M,R)\, A_j(R,N)\, ds_R = -\sum_{i=1}^{j-1} A_i\,(MN) = A_j(M,N) + \\
+ \int A_j(M,R)\, K(R,N)\, ds_R \quad (j = 2,3 \ldots p), \\
A_{p+1}(M,N) + \int K(M,R)\, A_{p+1}(R,N)\, ds_R = K(M,N) - \sum_{i=1}^{p} A_i(M,N) = \\
= A_{p+1}(M,N) + \int A_{p+1}(M,R)\, K(R,N)\, ds_R.
\end{gathered} \tag{4}$$

$A_i(M, N)$ $(i \leqslant p)$ линейно независимы и тождественно нулю не равны. Функции каждой из p групп, на которые разбивается полная система фундаментальных функций, дают начало системе главных функций, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{gathered}
\mu^{(s)}_{i1}(M) + \int K(M,R)\, \mu^{(s)}_{i1}(R)\, ds_R = 0 \quad \left(\begin{array}{l} s = 0,\ i = 1,2, \ldots q_1 \\ s = 1,\ i = q_1 + 1, \ldots q_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s = p-1,\ i = q_{p-1}+1, \ldots n \end{array}\right) \\
\mu^{(s)}_{i,j_s}(M) + \int K(M,R)\, \mu^{(s)}_{i,j_s}(R)\, ds_R = - \left(\begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant q_1,\ s = 0,\ j_s = 1, 2, 3 \ldots p_0 \\ q_1+1 \leqslant i \leqslant q_2,\ s = 1,\ j_s = 1,2,3 \ldots p_1 \\ q_2+1 \leqslant i \leqslant q_3,\ s = 2,\ j_s = 1,2,3 \ldots p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{p-1}+1 \leqslant i \leqslant n,\ s = p-1,\ j_s = 1 = p_{p-1} \end{array}\right) \\
- \sum_{k=1}^{j_s-1} \mu^{(s)}_{ik}(M)
\end{gathered} \tag{5}$$

---

* В указанной моей книге имеется также ряд других неточностей (исследование бесконечной системы, теоремы эквивалентности), требующих исправлений и уточнений.

$$\left.\begin{aligned} \nu_{i1}^{(s)}(N)+\int \nu_{i1}^{(s)}(R)\,K(R,N)\,ds_R=0 \\ \nu_{ij_s}^{(s)}(N)+\int \nu_{ij_s}^{(s)}(R)\,K,(R,N)\,ds_R=-\sum_{k=1}^{j_s-1}\nu_{ik}^{(s)}(N) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

с теми же значениями индексов; при этом $p_0=p>p_1>p_2\ldots>1$. Главные функции удовлетворяют также следующим условиям биортогональности

$$\int_F \mu_{ij_s}^{(s)}(N)\,\nu_{rt_k}^{(k)}(N)\,ds_N=\frac{1}{0},\ \text{если}\ i=r,\ s=k,\ i_s+t_k=p_s+1. \tag{2}$$

(В «Курсе математического анализа» Э. Гурса эта система указана в примечании на стр. 85, § 579. Для того, чтобы перейти от обозначений Гурса к нашим, можно положить $\varphi_i=\mu_{j,i}^{(1)}\ \psi_i=\sum\limits_{l=1}^{s-i-1}\nu_{j,l}^{(1)}$)

При помощи главных функций каноническое ядро $k(M,N)=\sum\limits_{i=1}^{p}A_i(M,N)$ может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} k(M,N)=\sum_{i=1}^{q_1}\mu_{i1}^0(M)n_{ip}^0(N)+\mu_{i2}^0(M)n_{ip-1}^0(N)+\ldots+\mu_{ip-1}^0(M)n_{i2}^0(N)+\mu_{ip}^0(M)\,\nu_{i1}^0(N)+ \\ +\sum_{i=q_1+1}^{q_2}\mu_{i1}^{(1)}(M)\,n_{ip_1}^{(1)}(N)+\ldots+\mu_{ip_1-1}^{(1)}(M)\,n_{i2}^{(1)}(N)+\mu_{ip_1}^{(1)}(M)\,\nu_{i1}^{(1)}(N)+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\ldots+\sum_{i=q_{p-2}+1}^{q_{p-1}}\mu_{i1}^{(p-2)}(M)\,n_{i2}^{(p-2)}(N)+\mu_{i2}^{(p-2)}(M)\,\nu_{i1}^{(p-2)}(N)+ \\ +\sum_{i=q_{p-1}+1}^{n}\mu_{i1}^{(p-1)}(M)\,\nu_{i1}^{(p-1)}(N) \end{aligned} \tag{7}$$

или в виде:

$$\begin{aligned} k(M,N)=\sum_{i=1}^{q_1}\nu_{i1}^0(N)m_{ip}^0(M)+\nu_{i2}^0(N)\,m_{ip-1}^0(M)+\ldots+\nu_{ip-1}^0(N)m_{i2}^0(M)+ \\ +\nu_{ip}^0(N)\,\mu_{i1}^0(M)+\sum_{i=q_1+1}^{q_2}\nu_{i1}^{(1)}(N)\,m_{ip_1}^{(1)}(M)+\ldots+\nu_{ip_1-1}^{(1)}(N)\,m_{i2}^{(1)}(M)+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\nu_{ip_1}^{(0)}(N)\,\mu_{i1}^{(1)}(M)+\sum_{i=q_{p-2}+1}^{q_{p-1}}\nu_{i1}^{(p-2)}(N)\,m_{i2}^{(p-2)}(N)+\nu_{i2}^{(p-2)}(N)\,\mu_{i1}^{(p-2)}(M)+ \\ +\sum_{i=q_{p-1}+1}^{n}\nu_{i1}^{(p-1)}(N)\,\nu_{i1}^{(p-1)}(M). \end{aligned} \tag{8}$$

Функции $m_{ij}^{(s)}$ и $n_{ij}^{(s)}$ представляют определенные линейные выражения функци $\mu(M)$ и $\nu(N)$. Вычисление показывает, что $m_{ij}^{(s)}$, $n_{ij}^{(s)}$ линейно независимы. Переходим к решению внешней задачи Дирихле.

Очевидно уравнение

$$\mu^*(M)+\int_F \mu^*(N)\,K(M,N)\,ds_N=f(M)-\sum_{i=1}^{q_1} c_i^0\mu_{ip}^0(M)-$$

$$-\sum_{i=q_1+1}^{2} c_i^1\mu_{ip_1}^{(1)}(M)-\ldots-\sum_{i=q_{p-1}+1}^{q_{p-1}} c_i\mu_{i2}^{(p-2)}(M)-\sum_{i=q_{p-2}+1}^{n} c_i^{(p-1)}\mu_{i1}^{(p-1)}(M) \tag{9}$$

имеет решение, если постоянные c_i^k определены из условий

$$c_i^{(k)}=\int_F f(M)\,\nu_{i1}^{(k)}(M)\,ds_M \quad \begin{matrix}(k=0,1,2,\ldots p-1)\\ (i=1,2,3,\ldots n).\end{matrix} \tag{10}$$

Таким образом потенциал двойного слоя

$$\int_F \mu^*(R)\frac{\partial}{\partial n_R}\left[\frac{e^{-ikr(P,R1)}}{r(PR)}\right]ds_R \tag{11}$$

дает такое решение уравнения $\Delta u+k^2u=0$, которое принимает на границе извне значение

$$f(M)-\sum_{i=1}^{q_1} c_i^0\mu_{ip}^0-\sum_{i=q_2+1}^{q_1} c_i^{(1)}\mu_{ip_1}^{(1)}-\ldots-\sum_{i=q_{p-1}+1}^{n} c_i^{(p-1)}\mu_{i1}^{(p-1)}. \tag{12}$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned}W^*(P)&=\frac{1}{2\pi i}\int_F \mu^*(R)\frac{\partial}{\partial n_R}\left[\frac{e^{-ikr(PR)}}{r(PR)}\right]ds_M=\int_F \mu^*(R)\,K(P,R)\,ds_R\\ W_{i\,s}^{(s)}(P)&=\frac{1}{2\pi i}\int_F \mu_{ij_s}^{(s)}(M)\frac{\partial}{\partial n_R}\left[\frac{e^{-ikr(PR)}}{r(PR)}\right]ds_R=\int_F \mu_{ij_s}^{(s)}(R)\,K(P,R)\,ds_R\end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Из (5), принимая во внимание свойства скачков потенциалов двойного слоя при приближении точки P к граничной точке M на F извне [1], легко получить:

$$\mu_{ij_s-1}^{(s)}(M)=\lim_{P\to M}[W_{i,j_s-1}^{(s)}-W_{i,j_s}^{(s)}]=\lim_{P\to M}W_{ij_s-1}^{*s}(P). \tag{14}$$

Из (4_3) левого следует, что потенциал двойного слоя

$$W(P,N)=\frac{1}{2\pi i}\int_F A_{p+1}(R,N)\frac{\partial}{\partial n_R}\left[\frac{e^{-ikr(PR)}}{r(PR)}\right]ds_R,$$

зависящий от параметра N, когда точка P стремится к граничной точке M на F, оставаясь все время во внешней области, имеет своим пределом

$$K(M,N)-k(M,N),$$

$$\lim_{P\to M}W(P,N)=K(M,N)-k(M,N). \tag{15}$$

Пользуясь (14) и (7), $k(M,N)$ запишем в виде:

$$k(M,N)=\sum_{i=1}^{q_{p-1}}\sum_{j=1}^{p_s-1}\mu_{ij}^{(s)}n_{ip_s-j+1}^{(s)}+\sum_{i=1}^{n}\mu_{ip_s}^{(s)}\nu_{i1}^{(s)}=$$

$$=\lim_{P\to M}\sum_{i=1}^{q_{p-1}}\sum_{j=1}^{p_s-1}W_{ij}^{*s}(P)\,n_{ip_s-j+1}^{(s)}(N)+\sum_{i=1}^{n}\mu_{ip_s}^{(s)}\nu_{i1}^{(s)}(N).$$

Пользуясь линейной независимостью функции $\nu_{i1}^{(s)}(N)$ $(i=1, 2, \dots n)$, выбираем для N n таких значений N_k, чтобы определитель

$$\| \nu_{i1}(N_k) \| \neq 0, \qquad (16)$$

и вводим обозначение:

$$\sum_{i=1}^{q_{p-1}} \sum_{j=1}^{p_s-1} W_i^{*s}(P)\, n_{ip_s-j+1}(N_k) = W_k^{**}(P) \quad (k=1,\ 2,\ 3 \dots n).$$

Теперь из (15) имеем:

$$\lim_{P\to M}\{K(P,N_k) - W(P,N_k) - W_k^{**}(P)\} = \sum_{i=1}^{n} \nu_{i1}^{(s)}(N_k)\mu_{ip_s}^{(s)}(M)\ (k=1,2,\dots n). \qquad (17)$$

Это есть неоднородная линейная система n уравнений с n неизвестными, с определителем, отличным от нуля; в левой части стоит функция, которая очевидно относительно P есть решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$. Обозначим эту левую часть через $\overline{W}_k(P)$. Тогда, разрешая (17), имеем:

$$\mu_{ip_s}^{(s)}(M) = \lim_{P\to M} \sum_{k=}^{n} a_k^{(s)}\, \overline{W}_k(P) \begin{pmatrix} s=0,\ 1,\ 2, \dots p-1 \\ p_s = p,\ p_1,\ p_2 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Из сравнения с (12) видим, что потенциал двойного слоя

$$W^*(P) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_i^{(s)} a_k^s\, \overline{W}_k(P), \qquad (18)$$

когда точка P извне стремится к граничной точке M, принимает значение $f(M)$.

С другой стороны, (18) очевидно есть решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ и удовлетворяет условию излучения на бесконечности; следовательно (18) есть единственное решение внешней задачи Дирихле с заданным граничным значением при характеристическом значении параметра k.

В качестве второго примера укажем решение внешней задачи Неймана. Чтобы не повторять запись многих формул, аналогичных приведенным выше, мы не будем вводить новых обозначений для фундаментальных функций и главных функций. Следует однако иметь в виду, что теперь речь идет об уравнениях (D^0) и (N_e^0), резольвенты которых имеют $\lambda = -1$ полюсом p-го порядка.

Уравнение

$$\nu^*(N) - \int_F \nu^*(M)\, K(M,N)\, ds_N = -\varphi(N) + \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)}\, \nu_{ip_s}^{(s)}(N) \qquad (19)$$

имеет решение, если постоянные $c_i^{(s)}$ определены из условий

$$c_i^{(s)} = -\int_F \varphi(N)\, \mu_{i1}^{(s)}(N)\, ds_N \cdot \begin{pmatrix} s=0,\ 1,\ 2, \dots p-1 \\ i=1,\ 2,\ 3, \dots n \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Таким образом потенциал простого слоя

$$\int_F \nu^*(R) \frac{e^{-ikr(PR)}}{r(PR)}\, ds_R \qquad (21)$$

дает такое решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$, нормальная производная которого извне принимает на границе значение

$$-\varphi(N) + \sum_{i=1}^{n} c_i^{(s)} \nu_{ip_s}^{(s)}(N). \tag{22}$$

Вводим обозначения:

$$\begin{gathered} V^*(P) = \frac{1}{2\pi i}\int_F \nu^*(R)\frac{e^{-ikr(PR)}}{r(PR)}\,ds_R, \\ V_{ijs}^{(s)}(P) = \frac{1}{2\pi i}\int_F \nu_{ij_s}^{(s)}(R)\frac{e^{-ikr(PR)}}{r(PR)}\,ds_R. \end{gathered} \tag{23}$$

Из (6)*, принимая во внимание свойство скачка нормальной производной потенциала простого слоя, когда точка извне стремится к границе, можем написать:

$$\nu_{ij_s-1}^{(s)}(N)\lim_{P\to N}\frac{\partial}{\partial n}\{V_{i,j_s-1}^{(s)}(P) - V_{i,j_s}^{(s)}(P)\} = \lim_{P\to N}\frac{\partial V_{ij_s-1}^{*s}}{\partial n}. \tag{24}$$

Из (4_3) правого следует, что предельное значение извне нормальной производной потенциала простого слоя

$$V(PM) = \frac{1}{2\pi i}\int_F A_{p+1}(R, M)\frac{e^{-ikr(PR)}}{r(PR)}\,ds_R,$$

зависящего от параметра M, когда P стремится к N извне, есть

$$\begin{gathered} K(N, M) - k(N, M), \\ \lim_{P\to N}\frac{\partial}{\partial n}V(P, M) = K(N, M) - k(N, M), \end{gathered} \tag{25}$$

каноническое ядро $k(N, M)$ имеет вид

$$k(N, M) = \sum_{i=1}^{q_{p-1}}\sum_{j=1}^{p_s-1}\nu_{ij}^{(s)}(N)\, m_{i,p_s-j+1}^{(s)}(M) + \sum_{i=1}^{n}\nu_{ip_s}^{(s)}(N)\,\mu_{i1}^{(s)}(M).$$

Согласно с (24) $k(N, M)$ может быть переписан в виде:

$$k(N, M)\lim\sum_{i=1}^{q_{p-1}}\sum_{j=1}^{p_s-1}\frac{\partial}{\partial n}V_{ij}^{*(s)}(P)\, m_{ip_s-j+1}^{(s)}(M) + \sum_{i=1}^{n}\nu_{ip_s}^{(s)}(N)\,\mu_{i1}^{(s)}(M).$$

В виду линейной независимости функции $\mu_{i1}^{(s)}(M)$ придадим M n таких M_k значений, чтобы определитель $\|\mu_{i1}^{(s)}(M_k)\| \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, и введем обозначение

$$\sum_{i=1}^{q_{p-1}}\sum_{j=1}^{p_s-1}V_{ij}^{*s}(P)\, m_{p_s-j+1}^{(s)}(M_k) = V_k^{**}(P)\ (k = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Из (25) имеем:

$$\lim_{P\to N}\frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{e^{-ikr(P, M_k)}}{r(P, M_k)} - V(P, M_k) - V_k^{**}(P)\right\} = \sum_{i=1}^{n}\nu_{ip_s}^{(s)}(N)\,\mu_{i1}^{(s)}(M_k).$$

---

* В формулах (6), (4) перед интегралом теперь стоит знак — и ядра транспонированы.

В фигурных скобках левой части этой линейной системы очевидно стоит решение (относительно P) уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$; обозначим его через $\overline{V}_k(P)$; решив систему, имеем:

$$\nu_{ip_s}(N) = \lim_{P \to N} \frac{\partial}{\partial n} \sum_{k=1}^{n} b_k^{(s)} \overline{V}_k(P) \left(\begin{array}{l} s = 0, 1, 2, \dots p-1 \\ p_s = p, p_1, p_2, \dots 1 \end{array} \right).$$

Теперь очевидно, что нормальная производная потенциала простого слоя

$$V^*(P) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} l_i^{(s)} b_k^{(s)} \overline{V}_k(P), \tag{26}$$

когда P извне стремится к граничной точке, имеет своим значением $\varphi(N)$.

С другой стороны, (26) есть решение уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$, удовлетворяющее условию излучения на бесконечности. Следовательно (26) есть решение, и при этом единственное, внешней задачи Неймана с граничным заданием $\varphi(N)$ при характеристическом значении параметра k.

Тбилисский математический институт.
Грузинский филиал
Академии Наук СССР.

Поступило
3 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Купрадзе, Основные задачи математической теории диффракции (1935). [2] Э. Гурса, Курс математического анализа, III, ч. I.