Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 9

МАТЕМАТИКА

М. ГОВУРИН

К ПОСТРОЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ BANACH'а

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 31 I 1939)

I. Мы исходим из пространства Banach'а X. Под кривой L в X мы понимаем совокупность всех непрерывных функций ограниченной вариации $x(t)$ (t — вещественная переменная $a \leqslant t \leqslant b$, $x \in X$), которые могут быть переведены одна в другую монотонной и непрерывной заменой переменной $t = \Theta(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$. Об определении функции ограниченной вариации см. ([2]). Каждую такую функцию $x(t)$ мы называем представлением кривой L. Независящую от специального выбора представления величину $\operatorname{var} x(t)$ мы называем длиной L и обозначаем $|L|$.

Термины «начало и конец кривой», «замкнутая кривая», «отрезок», «ломаная», «ломаная, вписанная в кривую», «точка лежит на кривой» очевидно не нуждаются в пояснениях. Кривые L_n стремятся к кривой L, если при некотором выборе представлений $x(t)$ для L и $x_n(t)$ для L_n эти функции определены в одном и том же промежутке (a, b) и $x_n(t) \to x(t)$ равномерно. Очевидно, что для произвольной кривой L можно подобрать последовательность ломаных L_n, вписанных в L и стремящихся к L. Очевидно также, что длина ломаной, вписанной в кривую, не превосходит длины этой кривой.

II. В моей заметке ([2]) определяются интегралы вида

$$\int_a^b x(t) \cdot du(t) \quad \text{и} \quad \int_a^b u(t) \cdot dx(t). \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ — непрерывная функция со значениями в X, $u(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ — функция ограниченной вариации со значениями в $U = \{X \to Z\}$ [см. ([3])], где Z — также пространство Banach'а. Значения интегралов принадлежат Z. Мы считаем известными определение и свойства этих интегралов. Здесь мы отметим лишь, что первый из них не превосходит по норме $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \|x(t)\| \operatorname{var}\limits_a^b u(t)$.

Важно заметить, что сказанное об этом интеграле остается в силе, если произведение $u \cdot x$ какое угодно, так как всякое произведение сводится к произведению второго типа ([3]).

Пусть $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная функция, определенная в некоторой сфере $S \subset X$, значения которой принадлежат $U = \{X \to Z\}$*.

* Можно было бы считать $\varphi(x)$ определенной на произвольном множестве $M \subset X$, удовлетворяющем некоторым дополнительным условиям, но мы ограничимся рассмотрением простейшего случая.

Если $x(t)$ $a \leqslant t \leqslant b$ есть представление некоторой кривой L в X и $L \subset S$, то $\varphi(x(t))$ есть непрерывная функция и существует интеграл

$$\int_a^b \varphi(x(t)) \cdot dx(t). \tag{2}$$

Так как значение этого интеграла зависит лишь от кривой L, но не от специального выбора ее представления, то мы будем называть его криволинейным интегралом функции $\varphi(x)$ по кривой L и обозначать

$$\int_L \varphi(x) \cdot dx. \tag{3}$$

III. В том случае, когда интеграл (3) не меняет своего значения при замене кривой L на другую кривую, лежащую в S и имеющую с L общие начало x_1 и конец x_2, мы будем говорить, что интеграл (3) не зависит от пути и будем писать его в форме

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \cdot dx. \tag{4}$$

Очевидно, что интеграл (3) не зависит от пути, если он обращается в нуль, коль скоро L есть треугольник, лежащий в S.

Положим, $Z = X^k$ и $U = X^{k-1}$, $S = X$, $\varphi(x) = x^{k-1}$. Тогда, как нетрудно проверить непосредственным вычислением, интеграл

$$\int_L x^{k-1} \cdot dx \tag{5}$$

обращается в нуль, когда L есть треугольник. Интеграл этот не зависит следовательно от пути, и имеет место равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} x^{k-1} \cdot dx = \frac{1}{k}(x_2^k - x_1^k).$$

Если $u_k \in [X^k \to Z]$, то множитель u_k, поставленный перед интегралом (5), можно внести под знак интеграла. Это явствует из того, что интеграл является пределом сумм известного рода [2], а возможность внесения знака симметричной операции за знак суммы уже известна [3].

Таким образом интеграл $\int u_k \cdot x^{k-1} \cdot dx$ не зависит от пути, если u_k симметрична. При $k=2$ имеет место и обратное утверждение. Если $\int u_2 \cdot x \cdot dx$ не зависит от пути, то операция u_2 симметрична. В самом деле, непосредственное вычисление показывает, что $\int_L u_2 \cdot x \cdot dx$, вычисленный по контуру параллелограма, построенного на векторах x_1 и x_2, равен $u_2 \cdot x_1 \cdot x_2 - u_2 \cdot x_2 \cdot x_1$. Если этот интеграл равен нулю при всех x_1 и x_2, то u_2 симметрична.

IV. Определение дифференциала абстрактной функции введено уже давно. Для нас будет удобнее, исходя из определения дифференциала Fréchèt, ввести в рассмотрение производные. Сохраняя прежние обозначения, мы говорим, что функция $z = \varphi(x)$ имеет в точке x своей производной линейную операцию $u \in \{X \to Z\}$, если линейное относительно Δx выражение $u \cdot \Delta x$ является главной частью приращения $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$, т. е. если $\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = u \cdot \Delta x + \rho(\Delta x)$, где $\frac{\| \rho(\Delta x) \|}{\| \Delta x \|} \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Применяя обычные обозначения, мы пишем $u = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$.

Допустим, что $\varphi(x)$ имеет производную $\varphi'(x)$ во всех точках X и что существует $\varphi''(x) = [\varphi'(x)]'$. Значения $\varphi''(x)$ должны лежать в $\{X \to \{X \to Z\}\}$, т. е. в $\{X, X \to Z\}$. Вообще, если положить $\varphi^{(n)}(x) = [\varphi^{(n-1)}(x)]'$, то $\varphi^{(n)}(x) \in \{\underbrace{X, \ldots, X}_{n} \to Z\}$. В частности, прямое вычисление дает, что при $Z = X^k$, $[x^k]^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-n+1)\,x^{k-n}$ $(n \leqslant k)$ и $[x^k]^{(n)} = 0$ $(n > k)$.

Действия над производными подчиняются многим правилам обычного дифференциального исчисления. Так, имеет место формула дифференцирования сложной функции: если $\varphi(x) = \psi(\theta(x))$ $(\theta(x) \in X_1)$, то $\varphi'(x) = \psi'(\theta(x)) \cdot \theta'(x)$, причем $\theta' \in \{X \to X_1\}$, а $\psi' \in \{X_1 \to Z\}$. Произведение $\psi' \cdot \theta'$ надо понимать, как обычное, не коммутирующее произведение операций.

V. Вычислим интеграл

$$\int_L \varphi'(x) \cdot dx, \tag{6}$$

где L есть отрезок, соединяющий точки x_1 и x_2. Воспользовавшись представлением L $x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ $0 \leqslant t \leqslant 1$, имеем

$$\int_L \varphi'(x) \cdot dx = \int_0^1 \varphi'(x + t(x_2 - x_1)) \cdot (x_2 - x_1)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \psi'(t)\,dt = \psi(1) - \psi(0) = \varphi(x_2) - \varphi(x_1),$$

где $\psi(t) = \varphi(x_2 + t(x_2 - x_1))$. Значение интеграла $\int \psi'(t)\,dt$ вычислено при помощи теоремы Bochner'а [1]. Если L есть ломаная, x_1 и x_2—ее концы, интеграл (6) будет попрежнему иметь значение $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$. При помощи предельного перехода мы получаем, что этот интеграл не зависит от пути и его значение для любой кривой равно разности значений $\varphi(x)$ на ее концах.

Теорема. *Если в точке x_0 и ее окрестности S существует $\varphi''(x)$, то $\varphi''(x_0)$ есть симметричная операция.*

Доказательство. Пусть L означает контур параллелограма с вершинами в точках x_0, $x_0 + x_1$, $x_0 + x_1 + x_2$, $x_0 + x_2$. Тогда, если $L \subset S$

$$\int_L \varphi'(x) \cdot dx = 0.$$

Пусть для $\| x - x_0 \| < \alpha$ $\| \varphi'(x) - \varphi'(x_0) - \varphi''(x_0) \cdot (x - x_0) \| = \| \rho(x - x_0) \| \leqslant \varepsilon \| x - x_0 \|$. Имеем

$$0 = \int_L \varphi'(x)\,dx = \int_L \varphi'(x_0) \cdot dx +$$

$$+ \int_L \varphi''(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot d(x - x_0) + \int_L \rho(x - x_0)\,dx. \tag{7}$$

Если заменим x_1 на λx_1, x_2 на λx_2 $(\lambda > 0)$ и полученный контур обозначим через L_λ, то

$$\int_{L_\lambda} \varphi''(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot d(x - x_0) = \lambda^2 \int_{L} \varphi''(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot d(x - x_0).$$

С другой стороны, если λ настолько мало, что $\| \lambda x_1 \| < \frac{\alpha}{2}$, $\| \lambda x_2 \| < \frac{\alpha}{2}$, то для точек контура L_λ будет $\| \rho(x - x_0) \| < \varepsilon \| x - x_0 \|$ и последний интеграл в формуле (7) получит оценку $\varepsilon(\| \lambda x_1 \| + \| \lambda x_2 \|) \cdot 2(\| \lambda x_1 \| + \| \lambda x_2 \|) = 2\varepsilon\lambda^2(\| x_1 \| + \| x_2 \|)^2$.

Так как

$$\int_{L_\lambda} \varphi'(x_0) \cdot dx = 0,$$

мы получаем

$$\lambda^2 \left\| \int_{L} \varphi''(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot d(x - x_0) \right\| \leqslant 2\varepsilon\lambda^2(\| x_1 \| + \| x_2 \|)^2.$$

В виду произвольности ε

$$\int_{L} \varphi''(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot d(x - x_0) = 0.$$

Если мы через L^* обозначим контур параллелограма, построенного на векторах x_1 и x_2, то, как нетрудно видеть, будет

$$\int_{L^*} \varphi''(x_0) \cdot x \cdot dx = 0,$$

из чего следует симметричность $\varphi''(x_0)$ (III).

VI. В заключение этого раздела докажем теорему о существовании первообразной.

Теорема. *Пусть в сфере $S \subset X$ задана функция $\Theta(x)$, значения которой принадлежат $U = \{X \to Z\}$. Пусть сверх того существует в S $\Theta'(x)$ и значения $\Theta'(x)$, принадлежащие $\{U \to Z\} = \{X, X \to Z\}$, суть симметричные операции. Тогда существует функция $\varphi(x)$, определенная в S, значения которой принадлежат Z, так что $\varphi'(x) = \Theta(x)$. $\varphi(x)$ определена с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что интеграл $\int \Theta(x) \cdot dx$ не зависит от пути. Допустим, что есть треугольник $L_0 \subset S$, так что $\left\| \int_{L_0} \Theta(x) \cdot dx \right\| = M > 0$. Тогда, разбивая L_0 на четыре равных треугольника, обозначим через L_1 контур того из них, для которого $\left\| \int_{L_1} \Theta(x) \cdot dx \right\| \geqslant \frac{M}{4}$. Продолжая это построение, получим последовательность вложенных друг в друга треугольников L_n, так что $| L_n | = \frac{1}{2^n} | L |$ и $\left\| \int_{L_n} \Theta(x) \cdot dx \right\| \geqslant \frac{1}{2^{2n}} M$. Треугольники L_n стягиваются в точку x_0. Для n достаточно больших и $x \in L_n$ будет

$$\| \Theta(x) - \Theta(x_0) - \Theta'(x_0) \cdot (x - x_0) \| = \| \rho(x - x_0) \| < \varepsilon \| x - x_0 \|.$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{2^{2n}} M \leqslant \left\| \int\limits_{L_n} \Theta(x)\,dx \right\| = \left\| \int\limits_{L_n} [\Theta(x) - \Theta(x_0) - \Theta'(x_0) \cdot (x - x_0)] \cdot dx \right\| =$$

$$= \left\| \int\limits_{L_n} \rho(x - x_0) \cdot dx \right\| \leqslant \varepsilon\, |L_n|^2 = \frac{\varepsilon}{2^{2n}} |L_0|,$$

т. е.

$$M \leqslant \varepsilon\, |L_0|^2 \quad \text{и} \quad M = 0.$$

Очевидно, что

$$\varphi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \Theta(x) \cdot dx,$$

где x_0 — произвольная точка S, будет первообразной для $\Theta(x)$.

VII. Этот раздел и следующий за ним содержат некоторые результаты, относящиеся к сходимости степенных рядов в пространствах Banach'a.

Исходя из пространств X и Z, мы строим пространства $U_n = [X^n \to Z]$ и рассматриваем ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot x^n \tag{8}$$

($u_0 \in Z$). Область сходимости A такого ряда есть звезда, т. е. обладает тем свойством, что вместе с точкой x в A входят и все точки tx, где t — любое вещественное число, меньшее единицы по модулю.

Мы говорим, что точка $x \in A$ есть точка равномерной сходимости, если существует такая окрестность x, в которой ряд (8) сходится равномерно. Обозначая через $\underline{A}$ множество внутренних точек A, и через B множество точек равномерной сходимости ряда (8), имеем следующие теоремы:

a) Множество $A - \underline{A}$ имеет в X первую категорию.

b) Множество $\underline{A} - B$ нигде не плотно в X.

VIII. Теорема. *Если $x_0 \in B$, найдется такая окрестность S точки x_0, что для $x \in S$ сходится ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \| u_n \cdot x_0^{n-k} (x - x_0)^k \|.$$

Следствие 1. Для $x \in S$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} u_n \cdot x_0^{n-k} \right) \cdot (x - x_0)^k.$$

Следствие 2. В точках равномерной сходимости ряд (8) допускает почленное дифференцирование.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета.

Поступило
8 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Bochner, Fund. Math., 20, 262—276 (1933). [2] Говурин, Fund. Math., 27, 254—268 (1936). [3] Говурин, ДАН, XXII, № 9 (1939).