Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 9

МАТЕМАТИКА

М. ГОВУРИН

О k-КРАТНО-ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ BANACH'а

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 31 I 1939)

Целью настоящей заметки является рассмотрение k-кратно-линейных операций в пространствах Banach'а и построение своего рода алгебры этих операций, что является полезным при построении дифференциального и интегрального исчисления в пространствах Banach'а ([2]).

I. Пусть дано $k+1$ пространство Banach'а $X_1, X_2, \ldots, X_k, Z$ и операция $z=u_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, определенная для $x_i \in X_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ и имеющая значение в Z. Операция эта называется k-кратно-линейной или, короче, k-линейной, если она аддитивна по отношению к каждому из аргументов и ограничена, т. е. если существует число $M>0$ такое, что

$$\| u_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) \| \leqslant M \| x_1 \| \| x_2 \| \ldots \| x_k. \tag{1}$$

Из этих двух условий вытекает непрерывность k-линейной операции по отношению к совокупности ее аргументов и следующее тождество

$$u_k(x_1, \ldots, x_{i-1}, \quad ax_i'+bx_i'', \quad x_{i+1}, \ldots, x_k) = au_k(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_k) + bu_k(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i'', x_{i+1}, \ldots, x_k), \tag{2}$$

где a и b — вещественные числа.

Наименьшая из постоянных M, для которых тождественно соблюдается неравенство (1), называется нормой операции u_k и обозначается $\| u_k \|$. Очевидно,

$$\| u_k \| = \sup_{x_i \in X_i, \, \|x_i\|=1} \| u_k(x_1, \ldots, x_k) \|. \tag{3}$$

Совокупность всех k-линейных операций из $X_1, \ldots, X_k$ в Z сама образует пространство Banach'а $\mathfrak{U}_k = \{X_1, \ldots, X_k \to Z\}$, если мы для элементов $\mathfrak{U}_k$ сохраним линейные соотношения и нормировку, определенные для них, как для операций.

В дальнейшем мы предполагаем, что два пространства X_i и X_j либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

Если некоторые из пространств $X_1, \ldots, X_j$ совпадают и операция $u_k \in \mathfrak{U}_k$ не меняет своего значения при перестановке двух аргументов, принадлежащих двум совпадающим пространствам, то она называется симметричной. В случае, если все пространства $X_1, \ldots, X_k$ различны, мы будем считать симметричной всякую операцию $u_k \in \mathfrak{U}_k$. Совокупность $U_k = [X_1, \ldots, X_k \to Z]$ всех симметрических операций из $X_1, \ldots, X_k$ в z образует в $\mathfrak{U}_k$ замкнутое линейное подпространство. Без труда доказывается существование ненулевых симметричных k-линейных операций для любых заданных пространств $X_1, \ldots X_k$ и Z.

II. Если мы в операции $z = u_k(x_1, \ldots, x_k)$ фиксируем $l (l < k)$ аргументов, положив например $x = \bar{x}_1, \ldots, x_l = \bar{x}_l$, то операция $u_k(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_l, x_{l+1}, \ldots, x_k)$ будет k-l-линейной операцией от остающихся свободными аргументов, т. е. элементом пространства $\{X_{l+1}, \ldots, X_k \to Z\}$. Обозначая эту вновь полученную операцию через v_{k-l}, мы видим, что операция u_k породила новую операцию u_l^*:

$$v_{k-l} = u_l^*(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_l),$$
$$u_l^* \in \{X_1, \ldots, X_l \to \{X_{l+1}, \ldots, X_k \to Z\}\}.$$

При этом $\| u_k \| = \| u_l^* \|$.

Если операция u_k была симметричной, то симметричными будут также операции u_l^* и v_{k-l}.

III. Представляется весьма удобным следующее обозначение. Пусть w — произвольный элемент $[X_1, \ldots, X_k \to Z]$ с нормой, равной единице. Назовем элемент $z = w(x_1, \ldots, x_k)$ произведением элементов $x_1, \ldots, x_k$ и будем его обозначать

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k. \tag{4}$$

Произведение это можно считать коммутативным, так как перестановка сомножителей, принадлежащих одному пространству, не меняет произведения в силу симметричности w.

Выбор w определяет тот или иной тип произведения. Нам представляются полезными следующие два типа:

IV. П р о и з в е д е н и я п е р в о г о т и п а. $X_1, \ldots, X_k$ — произвольные пространства Banach'а. Образуем пространство Ξ^* из линейных комбинаций вида

$$\xi = \sum_{i=1}^{p} a_i x_1^{(i)} \cdot x_2^{(i)} \cdot \ldots \cdot x_k^{(i)} \quad p = 1, 2, \ldots, x_s^i \in X_s \tag{5}$$

где a_i — произвольные вещественные числа. Сложение элементов Ξ^* и их умножение на вещественные числа определяются естественным образом. Нормируем Ξ^*, полагая

$$\| \xi \| = \left\| \sum_{i=1}^{p} a_i x_1^{(i)} \cdot \ldots \cdot x_k^{(i)} \right\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \sum_{i=1}^{p} f_k(x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)}) \right|, \tag{6}$$

где sup берется по всем симметричным k-линейным функционалам f_k, имеющим норму, равную единице. Нетрудно показать, что если Z есть любое пространство Banach'а, имеющее хоть один ненулевой элемент, то

$$\| \xi \| = \sup_{\substack{u_k \in [X_1, \ldots, X_k \to Z] \\ \|u_k\|=1}} \left\| \sum_{i=1}^{p} a_i u_k(x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)}) \right\|.$$

Если $\| \xi_1 - \xi_2 \| = 0$, мы считаем ξ_1 и ξ_2 совпадающими. После произведенного таким образом отождествления некоторых элементов Ξ^* оказывается линейным нормированным пространством, вообще говоря, неполным. Дополним его обычным образом, присоединяя к нему в качестве несобственных элементов совокупности всех эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей элементов Ξ^*. Вновь полученное пространство Ξ уже полно и, оставаясь линейным и нормированным, будет пространством Banach'а.

Положим теперь $Z = \Xi$ и рассмотрим операцию $w \in [X_1, \ldots, X_k \to Z]$, определяемую равенством

$$w(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k,$$

где правый член равенства рассматривается, как элемент Ξ. То, что $\|w\| = 1$, очевидно. w есть симметрическая операция, так как в силу нормировки Ξ элементы вида $x_1, \cdot \ldots \cdot x_k$, разнящиеся лишь порядком элементов, совпадают.

При таком выборе Z и w произведение $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$ есть тот элемент пространства Ξ, который одинаково с этим произведением записывается.

V. Произведения второго типа. Пусть $X_1, \ldots, X_{k-1}$ и Z — произвольные пространства Banach'а. Положим еще $X_k = [X_1, \ldots, X_{k-1} \to Z]$ и определим операцию $w \in [X_1, \ldots, X_{k-1}, X_k \to Z]$ следующим образом

$$w(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) = x_k(x_1, \ldots, x_{k-1}); \quad x_i \in X_i \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

В виду симметрии x_k симметрична и w и $\|w\| = 1$, т. е. значение операции $u_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1})$, $u_{k-1} \in [X_1, \ldots, X_{k-1} \to Z]$ может записываться, как произведение $u_{k-1} \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}$.

Заметим, что указанный тип произведений является в некотором смысле наиболее общим, так как в произведении $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$, определенном как угодно, любой из сомножителей x_i можно рассматривать, как знак k-l-линейной операции, примененной к остальным $k-1$ аргументам и заданной формулой

$$x_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_i \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_k.$$

В дальнейшем мы всегда будем употреблять для k-линейных операций мультипликативное написание, т. е. вместо $u_k(x_1, \ldots, x_k)$ будем писать $u_k \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$.

Условимся, что в случае отсутствия особых указаний произведение, в котором среди сомножителей нет операций, мы будем понимать в смысле IV. Если один из сомножителей есть операция, мы понимаем произведение в смысле V. Тем не менее нам потребуются еще некоторые условия для того, чтобы построить алгебру таких произведений.

VI. Пространство Ξ, определенное в IV, будем называть произведением пространств $X_1, \ldots, X_k$ и обозначать $X_1 \cdot \ldots \cdot X_k$. Симметрическая k-линейная операция $u_k \in [X_1, \ldots, X_k \to Z]$ определяет линейную операцию $u \in \{\Xi \to Z\}$, если мы положим для собственных элементов $\xi \in \Xi$:

$$u \cdot \xi = \sum_{i=1}^{p} a_i u_k \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_k. \tag{5}$$

Обратно, всякая линейная в Ξ операция u определяет k-линейную симметричную операцию $u_k \in [X_1, \ldots, X_k \to Z]$, если мы положим

$$u_k \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = u \cdot (x_1 \cdot \ldots \cdot x_k),$$

причем выражение в скобках справа понимается, как элемент Ξ. Так как при этом $\|u_k\| = \|u\|$, то пространства

$$[X_1, \ldots, X_k \to Z] \quad \text{и} \quad \{X_1 \cdot \ldots \cdot X_k \to Z\}$$

изоморфны, и мы можем считать их совпадающими.

Выражение $u_k \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_l$ $(l < k)$ пока не имеет смысла, но если мы захотим придать ему какой-то смысл и потребуем, чтобы имело вместе с тем смысл произведение $(u_k \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_l) \cdot x_{l+1} \cdot \ldots \cdot x_k$ и чтобы оно совпадало с $u_k \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_l \cdot x_{l+1} \cdot \ldots \cdot x_k$, то в силу замечания в V

$$u_k \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_l \in [X_{l+1}, \ldots, X_k \to Z] = \{X_{l+1} \cdot \ldots \cdot X_k \to Z\}.$$

Условимся таким образом считать, что $u_k \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_l$ есть k-l-линейная операция $v_{k-l} \in [X_{l+1}, \ldots, X_k \to Z]$, определяемая из равенства $v_{k-l} \cdot x_{l+1} \cdot \ldots \cdot x_k = u_k \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_l \cdot x_{l+1} \cdot \ldots \cdot x_k$ (см. II).

VII. Произведение вида $(x_1 \cdot \ldots \cdot x_l) \cdot (x_{l+1} \cdot \ldots \cdot x_k)$ должно по условию (VI) принадлежать пространству $(X_1 \cdot \ldots \cdot X_l) \cdot (X_{l+1} \cdot \ldots \cdot X_k)$, но так как это пространство можно считать совпадающим с пространством $X_1 \cdot \ldots \cdot X_l \cdot X_{l+1} \cdot \ldots \cdot X_k$, мы примем, что рассматриваемое произведение совпадает с элементом $x_1 \cdot \ldots \cdot x_l \cdot x_{l+1} \cdot \ldots \cdot x_k$ этого последнего пространства.

VIII. В случае, когда все рассматриваемые пространства $X_1, \ldots, X_k$ совпадают, можно писать X^k вместо $\underbrace{X \cdot \ldots \cdot X}_{k}$ и x^k вместо $\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{k}$.

Задавшись некоторым набором пространств и условившись, какого вида произведения будут рассматриваться и в каком смысле они будут пониматься, мы получаем алгебру, в которой справедливы все правила обычной алгебры, поскольку они касаются свойств сложения и умножения. При этом надо требовать выполнения следующих условий: а) Сумма может рассматриваться лишь тогда, когда все слагаемые однородны, т. е. принадлежат одному пространству. б) Последовательное произведение нескольких сомножителей можно рассматривать лишь тогда, когда существует произведение этих же сомножителей, взятых зараз (например если $u \in \{X \to Z\}$, $x_1, x_2 \in X$, нельзя рассматривать произведение $x_1 \cdot (u \cdot x_2) \in X \cdot Z$, поскольку не определено $x_1 \cdot u \cdot x_2$).

Весьма важно еще раз подчеркнуть, что операции, входящие в качестве сомножителей, должны быть симметричны. Например имеет место формула бинома:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^{n-k} \cdot x_2^k. \tag{7}$$

Обе части этого равенства можно умножить на любую симметричную n-линейную операцию u_n, так как левую часть и каждое слагаемое в правой части мы рассматриваем, как элементы $\Xi = X^n$, а u_n — как линейную операцию в Ξ. Если же u_n не симметрична, этого, вообще говоря, сделать нельзя.

IX. В заключение мы хотим поставить одну проблему. Пусть $u_k \in [X^k \to Z]$ и пусть

$$\| u_k \|_s = \sup_{\|x\|=1} \| u_k \cdot x^k \|.$$

Тогда $\| u_k \|_s \leqslant \| u_k \|$ [см. (2)]. Простой пример показывает, что знак неравенства действительно может иметь место. Пусть $X = M$ [пространство ограниченных измеримых функций $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ с нормой $\| x \| = \operatorname{vrai\,max}_{0 \leqslant t \leqslant 1} | x(t) |$], Z — пространство вещественных чисел и

$$u_2 \cdot x_1 \cdot x_2 = u_2 \cdot x_2 \cdot x_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x_1(t)\, x_2(t)\, dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x_1(t)\, x_2(t)\, dt.$$

Легко видеть, что $\| u_2 \| = 1$ и $\| u_2 \|_s = \frac{1}{2}$.

Желательно было бы получить оценку для отношения $\frac{\|u_k\|_s}{\|u_k\|}$ снизу. Banach [1]* показал, что для $X = Z = L^2$ $\|u_k\|_s = \|u_k\|$ при всех k. Мы можем показать, что для комплексно-линейных пространств (комплексно-линейное пространство отличается тем, что в нем допускается умножение элементов не только на вещественные, но и на комплексные множители) имеет место оценка

$$\frac{\|u_k\|_s}{\|u_k\|} \geqslant \frac{k!}{k^k}. \tag{8}$$

Она получается из тождества

$$x_1^{k-1} \cdot x = \frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{k-1} e^{-\frac{2\pi l i}{k}} \left(x_1 + x e^{\frac{2\pi l i}{k}}\right)^k,$$

последовательное применение которого дает

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k =$$
$$= \frac{1}{(k!)^2} \sum_{l_2=0}^{1} \sum_{l_3=0}^{2} \ldots \sum_{l_k=0}^{k-1} e^{-2\pi i\left(\frac{l_2}{2}+\frac{l_3}{3}+\ldots+\frac{l_k}{k}\right)} \left(x_1 + x_2 e^{\frac{2\pi l_2 i}{2}} + \ldots + x_k e^{\frac{2\pi l_k i}{k}}\right)^k. \tag{9}$$

Если положим $\|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = \|x_k\| = 1$, то каждая скобка в правой части (9) имеет норму, не превосходящую k. Умножим обе части равенства на u_k. Тогда каждое слагаемое справа будет иметь оценку $\|u_k\|_s \cdot k^k$, а так как число их $k!$, то левая часть будет иметь оценку $\frac{k^k}{k!}\|u_k\|_s$. Таким образом мы и получаем требуемое неравенство

$$\|u_k\| \leqslant \frac{k^k}{k!}\|u_k\|_s.$$

В частности

$$\frac{\|u_2\|_s}{\|u_2\|} \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \frac{\|u_3\|_s}{\|u_3\|} \geqslant \frac{2}{9}.$$

Эти же оценки (для $k=2$ и $k=3$) могут быть получены и для вещественно-линейных пространств. При $k=2$ коэффициенты в правой части (9) оказываются вещественными. При $k=3$ можно исходить из тождества

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{1}{24}\left[(x_1+x_2+x_3)^3 + (-x_1+x_2+x_3)^3 + \right.$$
$$\left. + (x_1-x_2+x_3)^3 + (x_1+x_2-x_3)^3\right].$$

Пример, приведенный в начале этого раздела, показывает, что для $k=2$ эта оценка является точной (если не ограничиваться пространствами частного вида). Весьма интересно было бы знать точность оценки (8) при других k и получить какую-нибудь оценку для пространств вещественно-линейных.

С другой стороны, можно было бы, следуя за Banach'ом, заняться исследованием различных частных случаев.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета.

Поступило
8 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Studia Math., 7; [2] М. Говурин, ДАН, XXII, № 9 (1939).

* Banach дает другое определение симметричной операции, чем приведенное нами, и доказывает равенство $\|u_k\|_s = \|u_k\|$ для операций, симметричных в его смысле. Однако из его результата это равенство может быть получено и для операций, симметричных в нашем смысле.