Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

П. Е. ДЮБЮК

МОНОМИАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И КРИТЕРИИ НЕПРОСТОТЫ ГРУППЫ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 8 II 1939)

В настоящей работе приводится ряд теорем о нормализаторе элемента в конечной группе и даются приложения этих теорем к выводу новых критериев непростоты группы. В некоторых частях полученные результаты дополняют и усиливают формулировки, данные автором в работе «О нормализаторе элемента в конечной группе» ([1]). Существенную роль при выводе основных теорем играет инвариантность одного выражения, которое часто встречается в теории мономиальных представлений групп. Именно, в ряде случаев оказывается полезным применять следующее предложение, справедливость которого обнаруживается весьма простым подсчетом:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{G}$—произвольная конечная группа, $\mathfrak{H}$—ее подгруппа, так что*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}G_2 + \ldots + \mathfrak{H}G_n \tag{1}$$

и A—некоторый элемент группы $\mathfrak{G}$.

Пусть

$$\mathfrak{H}G_{\alpha_1},\ \mathfrak{H}G_{\alpha_2}, \ldots\ \mathfrak{H}G_{\alpha_k} \tag{2}$$

есть совокупность смежных систем разложения (1), циклически переходящих одна в другую при умножении (справа) на A.

Пусть $G_{\alpha_i}A = H_i G_{\alpha_{i+1}}$, где все H_i—элементы группы $\mathfrak{H}$ ($i = 1, 2, \ldots k$; $G_{\alpha_{k+1}} = G_{\alpha_1}$). Если произведение $H_1 H_2 \ldots H_k$ принадлежит к центру группы $\mathfrak{H}$, то оно инвариантно по отношению к выбору системы вычетов в смежных системах (2).

Опираясь на теорему 1, можно получить такой результат:

Теорема 2. *Пусть A—элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p—нечетное простое число). Если каждый элемент нормализатора элемента A^{p^i} ($0 < i < k$), сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} не делится на p^2.*

При выводе теоремы 2 используются аппарат и обозначения теории квазинормализаторов ([2]).

Для случая $\lambda_i \neq k - i$ доказательство основывается на следующем вспомогательном предложении.

Лемма. *Если имеют место условия теоремы 2 и сверх того $\lambda_i \neq k - i$, то отношение порядков квазинормализаторов $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$ и $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ сравнимо с единицей по модулю p^i.*

Доказательство леммы проводится сравнительно сложным путем и основывается на применении теоремы 1. Если $\lambda_i = k - i$, то теорема 2 быстро доказывается непосредственно. Для случая $i \neq 0$ теорема 2 усиливает один из результатов, полученных автором в цитированной выше работе ([1]).

Применяя надлежащее число раз теорему 2, можно получить далее такое предложение:

Теорема 3. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент нормализатора элемента A^{p^i} ($i \neq 0$), сопряженный с элементом A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A не делится на p^{i+2}.*

Положив $i = k - 2$, мы придем к наиболее важному частному случаю теоремы 3.

Теоремы 2 и 3 будут справедливы также и для случая $p = 2$, если поставить дополнительное требование, чтобы элемент четвертого порядка $A^{2^{k-2}}$ не был сопряжен со своим обратным элементом ([3]).

Например теорема, аналогичная теореме 2, формулируется так:

Теорема 4. *Пусть A — элемент порядка 2^k группы $\mathfrak{G}$. Если каждый элемент нормализатора элемента A^{2^i} ($i \neq 0$), сопряженный со степенью A, есть снова степень A и элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{2^{i+1}}$ и A^{2^i} не делится на 4.*

Таким же образом видоизменяется теорема 3. Отметим далее следующее, более специального характера предложение:

Теорема 5. *Пусть элемент A порядка p^k (p — простое число) группы $\mathfrak{G}$ не сопряжен ни с какой своей степенью. Если каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{k-2}}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{k-1}}$ и A не делится на p.*

Переходим теперь к рассмотрению критериев непростоты группы. Приведем прежде всего такой результат:

Теорема 6. *Пусть элемент A порядка p^k (p — простое число) группы $\mathfrak{G}$ не сопряжен ни с какой своей степенью. Пусть каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{k-2}}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Если порядок нормализатора элемента A не делится на p^{2k}, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему делителю порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простому с p.*

Для доказательства теоремы 6 достаточно использовать критерий непростоты группы, выведенный В. К. Туркиным во второй из цитированных выше работ ([2]) и затем дополненный автором ([3]), и применить теорему 5.

Для получения дальнейших результатов нам придется предварительно несколько расширить область применения следующих теорем, доказанных в работе В. К. Туркина и П. Е. Дюбюка «О строении простых групп» ([4]).

Теорема *A*. Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева подгруппа порядка p^α некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\beta n$ (p — нечетное простое число, n не делится на p). Пусть A — элемент подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка p^k, причем всякий элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z, равен A^{mz}, где $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Если порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ не делится на $p^{\alpha+k}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.

Теорема B. Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева подгруппа порядка 2^{α} некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $2^{\beta}n$ (n — нечетное). Пусть A — элемент подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка 2^k, причем всякий элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный со степенью A, будет снова степенью A. Если элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом и порядок нормализатора элемента $A^{2^{k-1}}$ не делится на $2^{k+\alpha}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n. Сформулируем такие более общие предложения:

Теорема 7*. *Пусть A — элемент порядка p^k, принадлежащий центру подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка p^{α} некоторой группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Пусть элемент $A^{p^{k-1}}$ не входит в коммутант группы $\mathfrak{P}$.*

Если каждый элемент группы $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, и порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ не делится на $p^{\alpha+k}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель.

Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему делителю порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простому с p.

Теорема 8. *Пусть A — элемент порядка 2^k, принадлежащий центру подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка 2^{α} некоторой группы $\mathfrak{G}$. Пусть элемент $A^{2^{k-1}}$ не входит в коммутант группы $\mathfrak{P}$. Если каждый элемент группы $\mathfrak{P}$, сопряженный со степенью A, есть снова степень A, элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом и порядок нормализатора элемента $A^{2^{k-1}}$ не делится на $p^{\alpha+k}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему нечетному делителю порядка группы $\mathfrak{G}$.*

Для доказательства теорем 7 и 8 достаточно сделать несколько дополнительных замечаний к выводу теорем A и B, в частности применить теорему 1.

Основываясь на теореме 7 и применяя теорему 3 для случая $i = k-2$, получаем следующий признак непростоты группы:

Теорема 9. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Пусть элемент $A^{p^{k-1}}$ не принадлежит коммутанту силовской p-подгруппы нормализатора элемента A. Если каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{k-2}}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель.*

Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему делителю порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простому с p. Если $k \leqslant 2$, то нормализатор элемента $A^{p^{k-2}}$ следует в условии теоремы заменить нормализатором элемента $A^{p^{k-1}}$.

Для случая $p = 2$ получаем такой критерий:

Теорема 10. *Пусть A — элемент порядка 2^k группы $\mathfrak{G}$. Пусть элемент $A^{2^{k-1}}$ не принадлежит коммутанту силовской подгруппы нормализатора элемента A, порядок которой есть степень 2. Если каждый элемент нормализатора элемента $A^{2^{k-2}}$, сопряженный со степенью A, есть снова степень A и элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Порядок этого*

* Теорема 7 может быть получена как частный случай более общего предложения, предварительное сообщение о котором опубликовано В. К. Туркиным ([5]).

нормального делителя кратен наибольшему нечетному делителю порядка группы $\mathfrak{G}$.

Следствием приведенных теорем является такой признак непростоты группы:

Теорема 11. *Пусть A — элемент порядка p группы $\mathfrak{G}$ (p — простое число). Если A не сопряжен ни с одним элементом силовской p-подгруппы $\mathfrak{P}$ своего нормализатора и не принадлежит коммутанту $\mathfrak{P}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему делителю порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простому с p.*

Поскольку речь идет о существовании нормального делителя, а не о порядке его, теорема 11 содержит, как частный случай, следующее хорошо известное предложение Бернсайда ([6]).

Если группа $\mathfrak{G}$ порядка g имеет подгруппу Силова порядка p^{α}, входящую в центр своего нормализатора, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка $\frac{g}{p^{\alpha}}$.

Теорема 11 обобщает также следующую теорему, доказанную В. К. Туркиным в работе «Ein neues Kriterium der Einfachheit einer endlichen Gruppe» ([7]).

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа порядка $p^{\alpha}m$ (p — простое число, m взаимно просто с p). Пусть подгруппа Силова $\mathfrak{P}$ порядка p^{α} группы $\mathfrak{G}$ — абелева. Если в $\mathfrak{P}$ содержится элемент, принадлежащий центру нормализатора группы $\mathfrak{P}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, кратного m.

Наконец частным случаем теоремы 11 является такой результат, ранее полученный автором ([1]).

Пусть A — элемент порядка p группы $\mathfrak{G}$ (p — простое число).

Если силовская p-подгруппа нормализатора элемента A — абелева и ни один элемент ее не сопряжен с A, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему делителю порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простому с p.

Сделаем в заключение еще одно замечание: в то время как доказательство теорем 9 и 10 существенным образом и во многих пунктах опирается на теорию квазинормализаторов, теорема 11 может быть получена и независимо от этой теории. Именно, пользуясь методом мономиальных представлений групп, можно доказать следующее предложение:

Теорема 12. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — простое число). Пусть $\mathfrak{P}$ — силовская p-подгруппа нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$. Если A не содержится в коммутанте группы $\mathfrak{P}$ и каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod{p}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Порядок этого нормального делителя кратен наибольшему делителю порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простому с p.*

Легко показать, что, положив в условии теоремы 12 $k = 1$, мы придем к теореме 11.

Институт математики
Московского гос. университета.

Поступило
13 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Е. Дюбюк, ДАН, XXII, 3 (1939). [2] В. К. Туркин, Мат. сборн., **2 (44)**, 5 (1937); В. К. Туркин, Изв. Акад. Наук, сер. мат., № 4 (1938). [3] П. Е. Дюбюк, Изв. Акад. Наук, сер. мат., № 5—6 (1938). [4] В. К. Туркин и П. Е. Дюбюк, ДАН, XX, № 7—8 (1938). [5] В. К. Туркин, ДАН, XXI, № 4 (1938). [6] W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, p. 327; О. Ю. Шмидт, Абстрактная теория групп, 168 (1933). [7] W. K. Turkin, Math. Annalen, B. III (1935).