Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 9

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИН и Б. ЛЕВИТАН

О РЯДАХ FOURIER ОБОБЩЕННЫХ, ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 27 I 1939)

1. Известно, что для почти периодических функций H. Bohr'a, а также для всех имеющихся обобщений почти периодических функций существует среднее значение, вычисляемое по формуле

$$M\{f\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,dx.$$

Недавно один из нас рассмотрел новый класс непрерывных почти периодических функций, в области которого сохраняется теорема единственности для рядов Fourier ([1]).

Эта обобщенная почти периодичность определяется следующим образом:

для каждых $\varepsilon>0$ *и* $N>0$ *можно указать почти периодическое множество чисел* ([2]) $\tau(\varepsilon, N)$ *таких, что*

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon\quad(|x|<N). \tag{1}$$

Такие почти периодические функции мы условимся называть N-почти периодическими функциями*.

Числа τ, удовлетворяющие неравенству (1), мы будем называть (ε, N)-смещениями.

Основные результаты, полученные в цитированной выше работе, следующие:

---

* В цитированной работе было дано другое определение обобщенной почти периодичности, а именно рассматривался класс функций, удовлетворяющих следующим двум условиям:

Условие 1. Для каждых $\varepsilon>0$ и $N>0$ существует относительно плотное множество чисел $\tau=\tau(\varepsilon, N)$ таких, что

$$|f(x\pm\tau)-f(x)|<\varepsilon\quad(|x|<N). \tag{2}$$

Условие 2. Если τ' удовлетворяет неравенству (2) с ε', а τ'' с ε'', то $\tau=\tau'+\tau''$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\delta\quad(|x|<N),$$

причем $\delta=\delta(\varepsilon',\varepsilon'')$ стремится к нулю при ε' и $\varepsilon''\to 0$. Однако при достаточно общих предположениях этот класс функций совпадает с N-почти периодическими функциями.

a) Класс N-почти периодических функций линеен.

b) Если N-почти периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx<\infty \tag{3}$$

и если для всех действительных λ существует предел

$$a(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx, \tag{4}$$

то N-почти периодической функции можно сопоставить ряд Fourier

$$f(x)\sim\sum A_n\,e^{-i\lambda_n x}\,,$$

где

$$A_n=\lim\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,e^{-i\lambda_n x}\,dx,$$

причем этот ряд Fourier однозначно определяет N-почти периодическую функцию.

Если для некоторой удовлетворяющей (3) функции $f(x)$ предел (4) не при всех значениях λ существует, то среднее, употребляемое в теории H. Bohr'a, можно заменить любым функционалом, удовлетворяющим условиям:

1) $M\{af+bg\}=aM\{f\}+bM\{g\}$ [a, b — постоянные числа, f, g — удовлетворяют неравенству (3)].

2) $M\{f\}\geqslant 0$, если $f\geqslant 0$.

3) $M\{f(x+x_0)\}=M\{f(x)\}$ (x_0 — действительное число).

4) Если $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}f(x)\,dx$ существует, этот предел совпадает с $M\{f\}$.

В самом общем случае такой функционал может быть построен с помощью обобщенного предела S. Banach'a (3).

Функционал $M\{f\}$ ставит в соответствие каждой функции, удовлетворяющей (3), ряд Fourier

$$f(x)\sim\sum A_n\,e^{i\lambda_n x}\,,$$

где

$$A_n=M\{f(x)\,e^{-i\lambda_n x}\}\,.$$

c) Если ряды Fourier двух N-почти периодических функций, построенные с помощью одного и того же функционала, совпадают, то эти функции тождественно равны.

d) Для этих функций имеет место также своя теорема аппроксимации функции полиномами, построенными по H. Weyl'ю из ее ряда Fourier.

Естественно возникает вопрос, существуют ли ограниченные N-почти периодические функции, для которых обычного среднего нет.

В этой заметке мы строим пример такой функции.

Заметим также, что эта построенная нами функция является даже N-периодической функцией, т. е. каждому числу $N>0$ можно сопоставить число l_N такое, что

$$f(x+nl_N)=f(x) \quad (|x|<N,\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

2. Пусть $\{\varepsilon_i\}$—последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \varepsilon < \frac{1}{3}.$$

Выберем произвольное число $T_1 > 1$ и положим на интервале $(-T_1, T_1)$ $f(x)=1$.

Определим число l_1 из условия

$$l_1 > \frac{T_1}{\varepsilon_1}$$

и положим

$$f(x+nl_1)=f(x) \quad (|x|<T_1,\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Таким образом функция $f(x)$ определена на периодическом множестве интервалов $\mathfrak{M}_1$ плотности, меньшей ε_1*.

Выберем теперь число $T_2>0$ так, чтобы сумма длин интервалов, попавших в интервал $(-T_2, T_2)$, в которых $f(x)$ уже определена, не превышала $2\varepsilon_1 T_2$. Это возможно, так как плотность множества $\mathfrak{M}_1$ меньше ε_1.

На пересечении множества, дополнительного к $\mathfrak{M}_1$, с интервалом $(-T_2, T_2)$ положим $f(x)=0$.

Определим число $l_2=n_1 l_1$ (n_1 — натуральное число) из условия

$$l_2 > \frac{T_2}{\varepsilon_2}$$

и положим

$$f(x+nl_2)=f(x) \quad (|x|<T_2,\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

При этом функция $f(x)$ не переопределяется на множестве $\mathfrak{M}_1$, так как $l_2=n_1 l_1$ есть период множества $\mathfrak{M}_1$.

Теперь функция $f(x)$ определена на периодическом множестве интервалов $\mathfrak{M}_2$ плотности, меньшей $\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

Выберем число $T_3>0$ так, чтобы сумма длин интервалов, попавших в интервал $(-T_3, T_3)$, в которых функция $f(x)$ уже определена, не превышала $2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)T_3$.

Определим число $l_3=n_2 l_2$ (n_2 — натуральное число) из условия

$$l_3 > \frac{T_3}{\varepsilon_3}.$$

На пересечении множества, дополнительного к $\mathfrak{M}_2$, с интервалом $(-T_2, T_2)$ положим $f(x)=1$ и положим

$$f(x+nl_3)=f(x) \quad (|x|<T_3,\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

При этом $f(x)$ не переопределяется на множестве $\mathfrak{M}_2$.

---

* Плотностью множества E мы, как обычно, называем $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\operatorname{mes} E_t}{2t}$, где E_t — пересечение множества E с интервалом $(-t, t)$.

Теперь $f(x)$ определена на периодическом множестве интервалов $\mathfrak{M}_3$ плотности, меньшей $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$.

Мы можем таким образом определить последовательно

$$T_1, T_2, \ldots, T_m, \ldots \text{ и } l_1, l_2, \ldots, l_m, \ldots$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы определим на всей оси ограниченную функцию $f(x)$.

Покажем, что функция $f(x)$ не имеет среднего.

В самом деле, очевидно, что

$$\frac{1}{2T_1}\int\limits_{-T_1}^{T_1} f(x)\,dx = 1 > \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{2T_2}\int\limits_{-T_2}^{T_2} f(x)\,dx \leqslant \varepsilon_1 < \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2T_3}\int\limits_{-T_3}^{T_3} f(x)\,dx \geqslant 1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2) > 1-\varepsilon > \frac{2}{3},$$

и вообще

$$\frac{1}{2T_{2k+1}}\int\limits_{-T_{2k+1}}^{T_{2k+1}} f(x)dx \geqslant 1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{2k}) > 1-\varepsilon > \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{2T_{2k}}\int\limits_{-T_{2k}}^{T_{2k}} f(x)\,dx \leqslant \varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{2k-1} < \varepsilon < \frac{1}{3}.$$

Рассмотрим теперь функцию $f_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta f(x+u)\,du$ $(0<\delta<1)$.

Очевидно, что $f_\delta(x)$ — ограниченная, равномерно непрерывная функция. Покажем, что $f_\delta(x)$ не имеет среднего.

Это следует из тождества

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f_\delta(x)\,dx = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta f(x+u)\,du = \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta du\,\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} f(x+u)\,dx.$$

Покажем наконец, что $f_\delta(x)$ есть N-периодическая функция. В самом деле, всякий интервал $(-N, N)$ лежит внутри некоторого интервала $(-T_m, T_m)$, в котором имеет место равенство

$$f(x+nl_m) = f(x) \quad (|x| < T_m,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Следовательно

$$f_\delta(x+nl_m) = f_\delta(x) \quad (|x| < T_m-\delta,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Институт математики.
Государственный университет.
Харьков.

Поступило
1 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Besicovitch, Almost Periodic Functions, p. 55—59 (1932). [2] Б. Левитан, ДАН, XVII, № 6 (1938). [3] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, p. 33.