Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 5

МЕХАНИКА

М. Д. МИЛЛИОНЩИКОВ

ВЫРОЖДЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 28 XII 1938)

Применяемый далее метод изучения турбулентных пульсаций был предложен в 1924 г. Фридманом и Келлером(1). Метод этот состоит в использовании дифференциальных уравнений для коэффициентов корреляции между пульсациями в двух различных точках. Фридману и Келлеру не удалось извлечь из этого метода конкретных результатов. Только в 1937—1938 гг. Карман и Ховарт(2) получили этим методом вывод закона убывания интенсивности пульсаций со временем в случае так называемой однородной изотропной турбулентности, т. е. в случае равномерного беспорядочного расположения начальных турбулентных возмущений в бесконечном пространстве при равенстве нулю средних скоростей.

Автор вел исследование этого случая турбулентного движения независимо от Кармана и Ховарта и продвинулся в некоторых направлениях дальше этих авторов. Именно, закон затухания турбулентных возмущений найден Карманом и Ховартом в виде некоторой степенной функции с показателем 5α, где α—произвольная константа, которая должна быть определена из экспериментальных данных. Автору удалось определить теоретическое значение этой константы

$$5\alpha = -\frac{5}{4}.$$

Кроме того, далее приводятся явные аналитические выражения для коэффициентов корреляции между возмущениями в двух точках в любой момент времени. Эти формулы также допускают непосредственную экспериментальную проверку. Результаты сравнения формул этой заметки с экспериментальными данными будут опубликованы особо*.

Все дальнейшее изложение проведено в предположении возможности пренебрегать третьими моментами (подробнее о смысле этого допущения см. далее). Это допущение законно только при малых скоростях движения, т. е. на последних ступенях затухания турбулентности, когда сохраняются только медленные и крупные вихри. В начальной стадии мелких и быстрых пульсаций законность этого допущения сомнительна. Однако и упомянутый выше результат Кармана и Ховарта, усиленный автором, получен при

* После окончания этой работы я узнал, что проф. Л. Г. Лойцянский в своих еще не опубликованных исследованиях получил некоторые из изложенных здесь результатов.

том же допущении. Попытка же Кармана и Ховарта в дальнейших исследованиях привлечь третьи моменты, пренебрегая четвертыми, не представляется достаточно убедительной. В самом деле, можно было бы показать, что на конечной стадии затухания однородной изотропной турбулентности третьи моменты малы не только по сравнению со вторыми, но и по сравнению с четвертыми*. Объясняется это тем, что при малых скоростях все многомерные законы распределения компонент пульсаций в любой конечной группе точек приближаются к нормальным, а для этих последних третьи моменты обращаются в нуль. Поэтому и для больших скоростей сомнительно, чтобы учет третьих моментов без четвертых давал хорошие результаты.

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса движения несжимаемой вязкой жидкости:

$$\left.\begin{aligned} \nu \Delta u_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \\ \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Эти уравнения позволяют по начальным данным для $t=0$ определить значения функций $u_i(P)$ и $p(P)$ точки $P=(x_1, x_2, x_3)$ для всех $t>0$. При изучении турбулентных пульсаций естественно считать самые начальные данные случайными. Общая постановка проблемы изучения турбулентного движения должна быть в этом случае такова: дано распределение вероятностей для начальных условий, требуется определить распределение вероятностей для «случайных функций» $u_i(P)$ и $p(P)$ точки P в любой следующий момент времени $t>0$. В этой работе мы ограничиваемся изучением вместо самих распределений вероятностей их вторых моментов. Переход от теории к экспериментальным данным осуществляется при помощи общей для всей статистической механики эргодической гипотезы: средние по достаточно длинным промежуткам времени близки к соответствующим математическим ожиданиям.

Мы будем в дальнейшем математические ожидания обозначать чертой сверху, так например $\overline{u_i}$ обозначает математическое ожидание u_i. Под операцией осреднения будем понимать вычисление математических ожиданий.

Отклонения функций u_1, u_2, u_3, p от их математических ожиданий назовем пульсациями.

Обозначим:

$$v_i = u_i - \overline{u_i} \quad (i=1,2,3),$$

$$v_0 = p - \overline{p}.$$

Введем также обозначения для вторых моментов:

$$b_{\alpha\beta} = \overline{v_\alpha v_\beta},$$

$$B_{\alpha\beta} = \overline{v_\alpha(M')\, v_\beta(M'')}$$

и для третьих моментов:

$$B_{\alpha\beta\gamma} = \overline{v_\alpha(M')\, v_\beta(M'')\, v_\gamma(M''')}.$$

Здесь M', M'' и M''' обозначают (вообще говоря, различные) точки четырехмерного пространства:

$$M' = (x_1', x_2', x_3', t'),\ M'' = (x_1'', x_2'', x_3'', t''),\ M''' = (x_1''', x_2''', x_3''', t''')$$

* Это замечание принадлежит А. Н. Колмогорову.

При принятом нами осреднении отпадает необходимость предпосылать дальнейшим выводам какие-либо постулаты относительно повторного осреднения, так как повторное взятие математического ожидания не дает ничего нового.

Беря математическое ожидание от уравнений (1), мы приходим к уравнениям Рейнольдса, записанным для точки M':

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta' \overline{u'_i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p'}}{\partial x'_i} - \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial t'} - \sum_j \overline{u'_j}\frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x'_j} - \sum_j \frac{\partial b_{ji}}{\partial x'_j} = 0, \\ &\sum_j \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x'_j} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

Эта группа состоит из 4 уравнений для десяти неизвестных функций.

Замкнуть систему уравнений при предположении, о котором будет сказано ниже, удается, только связав пульсации скорости и давления в двух точках потока.

Использование этой идеи, принадлежащей Фридману и Келлеру, приводит к уравнениям, содержащим моменты третьего порядка. Предполагая, что третьими моментами $B_{\alpha\beta\gamma}$ можно пренебрегать, мы получим такую систему уравнений турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости, записанную для точки M':

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta' B_{ik}(M', M'') - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_{ik}(M', M'')}{\partial t'} - \sum_j \overline{u'_j}\frac{\partial B_{ik}(M', M'')}{\partial x'_j} - \\ &- \sum \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x'_j} B_{jk}(M', M'') = 0, \quad \sum_j \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x'_j} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2b}$$

Система (2a — 2b) содержит 20 дифференциальных уравнений для 20 неизвестных функций. Аналогичную систему уравнений можно написать и для точки M''. [В таком виде уравнения (2b) были даны А. Н. Колмогоровым в докладе на конференции Научно-исследовательского института механики Московского государственного университета в декабре 1936 г.]

Мы запишем обе системы только для интересующего нас случая, когда $\overline{u}_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ во всем пространстве:

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta' B_{ik}(M', M'') - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_{ok}(M', M'')}{\partial x'_i} - \frac{\partial B_{ik}(M', M'')}{\partial t'} = 0. \\ &\sum_j \frac{\partial B_{jk}(M', M'')}{\partial x'_j} = 0. \\ &\nu\Delta'' B_{ik}(M'', M') - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_{ok}(M'', M')}{\partial x''_i} - \frac{\partial B_{ik}(M'', M')}{\partial t''} = 0. \\ &\sum_j \frac{\partial B_{jk}(M'', M')}{\partial x''_j} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Решение системы (3) мы будем искать для симметричного процесса однородной изотропной турбулентности, при которой функции B_{ik} зависят только от разностей пространственных координат точек M', M'' (однородность) и инвариантны по отношению к вращению системы координат вокруг ее осей и к отражению системы координат в плоскостях, проходящих через ее начало (изотропность) ([2], [3]).

Из определения изотропности следует, что для двух точек M' и M'', лежащих на оси OX_1, только 4 корреляционные функции могут быть отличны от нуля, а именно: $B_{11}=B_{dd}$; $B_{22}=B_{33}=B_{nn}$; $B_{01}=B_{od}$; B_{oo}.

Можно установить, что в общем случае для точек, лежащих на произвольной прямой с направляющими углами α_1, α_2 и α_3, существует такая зависимость между различными корреляционными функциями:

$$\begin{aligned} B_{ik} &= \overline{B}\cos\alpha_i\cos\alpha_k + \delta_{ik} B_{nn}, \\ B_{ok} &= B_{od}\cos\alpha_k, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\overline{B} = B_{dd} - B_{nn}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases}$$

Из уравнений (3) и соотношений (4) можно найти, что $B_{ok}=0$ при $K=0, 1, 2, 3$, а система (3) сводится к 2 уравнениям:

$$\nu\left(\frac{\partial^2 B_{dd}}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial B_{dd}}{\partial r}\right) = \frac{\partial B_{dd}}{\partial \tau}^{*}, \tag{5}$$

где $\tau = t' + t''$ и

$$\frac{\partial B_{dd}}{\partial r} = -\frac{2}{r}\overline{B}. \tag{6}$$

Решение уравнения (5) легко найти, так как оператор, стоящий в левой части, есть оператор Лапласа в пятимерном пространстве для функции B_{dd}, зависящей только от r и τ.

Если записать $r=\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2}$, то легко убедиться, что уравнение (5) эквивалентно уравнению:

$$\nu\sum_j \frac{\partial^2 L_{dd}(y_1, y_2, \ldots, y_5, \tau)}{\partial y_j^2} = \frac{\partial L_{dd}(y_1, y_2, \ldots, y_5, \tau)}{\partial \tau}, \tag{7}$$

где $L_{dd}(y_1, y_2, \ldots, y_5, \tau) = B_{dd}(r, \tau)$.

Решение уравнения (7), принимающее при $\tau=0$ начальное значение $L_{dd}^{(0)}$, известно и имеет вид:

$$L_{dd}(y_1, y_2, \ldots, y_5, \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^{\frac{5}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} L_{dd}^{(0)}(z_1, \ldots, z_5)\, e^{-\frac{\Sigma(y_j - z_j)^2}{4\nu\tau}}\, dz_1, \ldots, dz_5. \tag{8}$$

Или, так как $L_{dd}^{(0)} = B_{dd}^{(0)}(\rho)$ и $\tau = t' + t''$,

$$B_{dd}(r, t', t'') = \\ = \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu(t'+t'')}\right)}{r^{\frac{3}{2}}2\nu(t'+t'')}\int_0^\infty B_{dd}^{(0)}(\rho)\,\rho^{\frac{5}{2}} I_{\frac{3}{2}}\left(\frac{r\rho}{2\nu(t'+t'')}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{4\nu(t'+t'')}\right)d\rho. \tag{9}$$

Особенно интересен тот случай, когда в начальный момент имеет место очень мелкая завихренность, т. е. функции $B_{dd}^{(0)}(\rho)$ и $B_{nn}^{(0)}(\rho)$ заметно отличаются от нуля только при очень малых ρ. В этом случае можно применять предельное решение, соответствующее «точечному источнику». Это последнее выражается элементарной формулой:

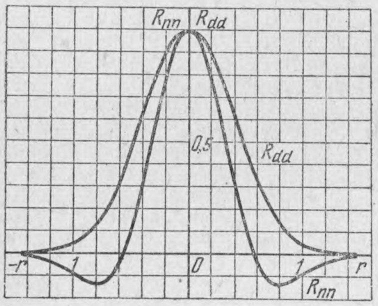
* Ср. Карман (2).

$$B_{dd}(r,t',t'')=\frac{k}{[2\nu(t'+t'')]^{\frac{5}{2}}}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu(t'+t'')}\right). \qquad (10)$$

Из (10) и (6) вытекает:

$$B_{nn}(r,t',t'')=\frac{k}{[2\nu(t'+t'')]^{\frac{5}{2}}}\left[1-\frac{r^2}{4\nu(t'+t'')}\right]\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu(t'+t'')}\right). \qquad (11)$$

Формулы (10) и (11) решают следующую физическую задачу: в начальный момент времени бесконечное пространство заполнено беспорядочно расположенными, очень мелкими вихрями, образовавшимися в различных точках пространства независимо друг от друга (имеется в виду независимость в смысле общепринятом в теории вероятностей); требуется при этих допущениях вычислить средние значения квадратов интенсивности пульсаций и коэффициенты корреляции между компонентами пульсаций в различных точках и в различные последующие моменты времени.



R_{dd} и R_{nn} при $8\nu t=0.33$ в зависимости от r.

Для среднего значения b_{ii} квадрата компоненты v_i пульсации скорости в момент времени t получаем: $b_{ii}(t)=b(t)=B_{dd}(o,t,t)$ или, в силу формулы (11),

$$b_{ii}(t)=b(t)=\frac{k_1}{t^{\frac{5}{2}}}, \qquad (12)$$

где $k_1=\frac{k}{(4\nu)^{\frac{5}{2}}}$ —константа, зависящая от начальной интенсивности пульсаций. Коэффициенты корреляции $R_{ij}(M',M'')$ между $v_i(M')$ и $v_j(M'')$ выражаются по формулам, аналогичным (4), через коэффициенты корреляции:

$$R_{dd}(r,t',t'')=\frac{B_{dd}(r,t',t'')}{\sqrt{b(t')\,b(t'')}},\quad R_{nn}(r,t',t'')=\frac{B_{nn}(r,t',t'')}{\sqrt{b(t')\,b(t'')}}$$

между продольными и поперечными компонентами скоростей в двух точках, расположенных на расстоянии r. В частности при $t'=t''=t$ имеем:

$$R_{dd}(r,t,t)=\exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right),\quad R_{nn}(r,t,t)=\left(1-\frac{r^2}{8\nu t}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{8\nu t}\right). \qquad (13)$$

Интересно отметить, что в то время, как R_{dd} положительно при всех r, коэффициент корреляции R_{nn} положителен лишь при $r^2<8\nu t$ (фиг.). Это обстоятельство было обнаружено экспериментально Драйденом ([4]).

В заключение выражаю признательность проф. А. Н. Колмогорову за постановку задачи и указания, данные мне в процессе выполнения этой работы.

Московский авиационный институт им. С. Орджоникидзе.

Поступило 28 XII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Keller u. Friedman, Proc. of the Intern. Congress of Appl. Mechan. (1924). [2] Th. de Kármán a. L. Howarth, Proc. Roy. Soc., Series A, **164**, № 917 (1938). [3] G. J. Taylor, Proc. Roy. Soc., **151**, № 873 (1935). [4] H. L. Dryden, Schubauer, Mock, Scramstad, Rep. NACA, № 581 (1937).