Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. М. НЕСТОРОВИЧ

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В КОНСТРУКТИВНОМ ОТНОШЕНИИ КОМПЛЕКСА М.-Б. и КОМПЛЕКСА Е

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 28 XII 1938)

§ 1. Многие геометрические места, применяемые для решения конструктивных задач в пространстве Лобачевского, идентичны соответствующим г. м. пространства Евклида. Но г. м. точек, равноотстоящих от данной прямой, коренным образом отличается от евклидовых параллелей и представляет кривую. Эта кривая называется эквидистантой и состоит из двух симметричных относительно данной прямой (оси) ветвей.

В связи с этой особенностью пространства Лобачевского представлялось*, что для решения конструктивных задач, приводящих к упомянутому г. м.**, помимо циркуля и линейки потребуется особый инструмент, так наз. «гиперциркуль», вычерчивающий эквидистанту.

В процессе разработки темы о геометрических построениях задач упомянутого типа** при помощи расширенного комплекса: циркуль-линейка-гиперциркуль, названного для краткости «комплексом М.-Б.» (Мордухай-Болтовского), каждый раз удается найти решение этих задач и классическим «комплексом Е» (Евклида—циркулем и линейкой). Это навело на мысль о наличии общей теоремы об эквивалентности в конструктивном отношении комплекса М.-Б. и комплекса Е. Последующие исследования обнаружили правильность этой теоремы. Доказательство этой теоремы слагается из следующих моментов:

1°. Доказывается, что все способы задания эквидистанты при наличии комплекса Е могут быть сведены к заданию ее осью и дистанцией (§ 2).

2°. Доказывается, что все основные построения, выполняемые при помощи комплекса М.-Б., могут быть выполнены и комплексом Е (§ 3—6).

§ 2. Эквидистанта может быть задана одним из следующих 5 способов:

a) Осью OQ и дистанцией $h=AO$ (фиг. 1).

b) Осью OQ и одной из своих точек A.

c) Графически—отрезком дуги $\overset{\frown}{AC}$ одной из ветвей.

d) Тремя точками A, B, C, принадлежащими одной ветви***.

---

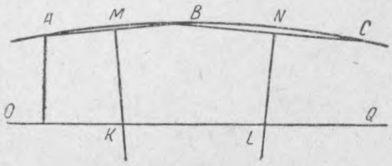
* Д. Д. Мордухай-Болтовской, О геометрических построениях в пространстве Лобачевского, II (1926).

** Именно задач, связанных с площадями или содержащих в условии одну или несколько высот.

*** При условии, что $\angle ABC > \Pi\left(\frac{AB}{2}\right) + \Pi\left(\frac{BC}{2}\right)$.

e) Тремя точками A_1, B, C_1, две из коих, например A_1, C_1 (фиг. 2), принадлежат одной ветви, а точка B—другой ветви.

Способ (b) при наличии комплекса Е легко приводится к (a). В способе (c) достаточно из средин M и N двух хорд AB и BC восстановить перпендикуляры к ним MK и NL. Кратчайшее расстояние KL сверхпараллельных MK и NL и будет осью эквидистанты, причем построение этой прямой (общего $\perp$-*a* сверхпараллелей) осуществляется комплексом Е.



Фиг. 1.

Способ (d) по существу (с рассматриваемой точки зрения) не отличается от (c).

В способе (e) мы получим ось эквидистанты, соединив средины E и F отрезков A_1B и C_1B.

Поэтому в дальнейшем имеется в виду только способ (a), соответствующий обычному способу задания окружности положением центра O и длиной ее радиуса R.

§ 3. Все возможные случаи применения гиперциркуля в конструктивных задачах сводятся к решению одной из следующих 4 задач:

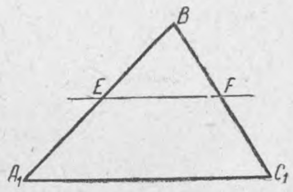
1°. Нахождению точки пересечения прямой и эквидистанты.

2°. Нахождению точки пересечения окружности и эквидистанты.

3°. Нахождению точки пересечения двух эквидистант.

4°. Черчению эквидистанты.

Что касается задачи 4°, то конечно эквидистанта, как сплошное г. м., не может быть вычерчена без специального инструмента, подобно тому, как не могут быть вычерчены, как сплошные г. м.: окружность—в построениях Штейнера или прямая—в построениях Маскерони. Но любое число отдельных точек эквидистанты, как это следует из дальнейшего (§ 4), может быть построено комплексом Е.



Фиг. 2.

§ 4. В решении задачи 1° следует различать 3 случая:

1) Когда заданная прямая пересекает ось эквидистанты.

2) Когда она параллельна оси эквидистанты.

3) Когда заданная прямая и ось эквидистанты сверхпараллельны.

Случай (1) приводится к построению гипотенузы прямоугольного треугольника по катету h (= дистанция) и противолежащему углу α (= наклон заданной прямой A_iB_i к оси эквидистанты) и решается комплексом Е*. Меняя положение прямой $A_i B_i$, можем найти любое число точек эквидистанты.

Случай (2) приводит к одному из частных случаев построения двупрямоугольника I по (a; c; μ) **.

Случай (3) приводит к другому частному случаю построения двупрямоугольника I по (a; c; μ). Оба эти построения выполнимы комплексом Е***.

§ 5. Решение задачи 2° приводит к построению двупрямоугольника I по (a; b; c) и также выполнимо комплексом Е****.

§ 6. В решении задачи 3° опять следует различать 3 случая:

---

* Подробности в работе автора: О геометрических построениях на плоскости Лобачевского [§ 7; 5°].

** Несторович, О двойниках косоугольного и прямоугольного треугольников на плоскости Лобачевского, «Учен. записки Института математики и физики», I, Ростов-на-Дону, стр. 65, построение 5° (1937).

*** То же.

**** l. c., построение 11°.

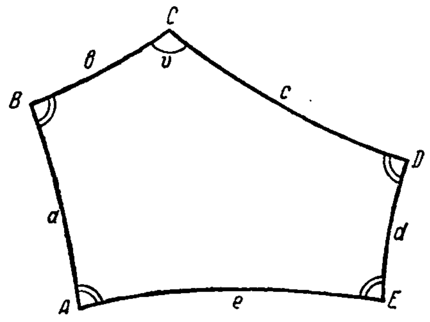
1°. Когда оси данных эквидистант пересекаются.

2°. Когда оси сверхпараллельны.

3°. Когда оси параллельны.

Случай 1° приводит к построению двупрямоугольника II по (b; c; λ)*.

Случай 2° приводит к построению пятиугольника с 4 прямыми углами и одним косым v по (b; c; e). Фиг. 3 является одной из модификаций косоугольного треугольника в пространстве Лобачевского, именно треугольником с двумя идеальными вершинами. Оказывается, требуемое построение также может быть выполнено комплексом E, причем осуществляется оно посредством преобразования частей данного пятиугольника при помощи цепи Энгеля.



Фиг. 3.

Случай 3° приводит к построению отрезка c, определяемого по формуле

$$\operatorname{sh} c = \frac{\operatorname{sh} h_1 + \operatorname{sh} h_2}{\operatorname{ch} h_2},$$

где h_1 и h_2—дистанции данных эквидистант.

Так как sh отрезка c выражается рациональной дробью с рациональными коэффициентами от sh и ch данных отрезков h_1 и h_2, то значение его может быть построено комплексом E**. Все необходимые построения легко могут быть указаны. После нахождения отрезка c задача сводится к задаче 1° (§ 4).

Выводы. Участие гиперциркуля в решении задач на построение 2-й степени на плоскости Лобачевского можно считать необязательным, и функции его могут быть сведены: 1) к вычерчиванию ветвей эквидистанты как сплошного геометрического места точек, так как любое число отдельных точек эквидистанты может быть получено комплексом E (§ 4); 2) к упрощению построений, выполняемых комплексом E, как это следует из сравнения геометрографических оценок решений комплексом М.-Б. и комплексом E***.

Таким образом роль гиперциркуля в построениях неевклидовой геометрии такова же, как роль линейки в построениях Маскерони или циркуля—в построениях Штейнера, и отчасти, пожалуй, такова, как роль наугольника в построениях комплексом E, так как наугольником фактически всегда пользуются в геометрических построениях комплексом E для упрощения последних, хотя применение его вовсе не обязательно.

Институт математики и физики.
Ростов-на-Дону.

Поступило
28 XII 1938.

* l. с., построение 18°.

** Д. Д. Мордухай-Болтовской, О геометрических построениях в пространстве Лобачевского, § 6.

*** Подробнее в работе автора: О геометрических построениях на плоскости Лобачевского (§ 11; заключение).