Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН и В. В. СТЕПАНОВ

О ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ В СОБСТВЕННОМ СМЫСЛЕ КЛАССУ W

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 XII 1938)

Суммируемая на каждом конечном интервале функция $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, называется почти-периодической W([1]), если любому заданному $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие длину $L(\varepsilon)$ и число $T(\varepsilon) > 0$ такие, что для относительно плотного по отношению к L множества чисел $\{\tau\}$ * выполняется при $T > T(\varepsilon)$ неравенство:

$$\frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} |F(x+\tau)-F(x)|\,dx < \varepsilon, \quad -\infty < \alpha < \infty. \tag{1}$$

Примерами почти-периодических функций W являются функции вида

$$F(x) = \varphi(x) + \psi(x), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — функция почти-периодическая S **, а суммируемая функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{\alpha} \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} |\psi(x)|\,dx = 0. \tag{3}$$

Насколько нам известно, до сих пор не существовало примера функций W в собственном смысле, т. е. функций, удовлетворяющих условию (1), которые не могут быть представлены в виде (2), причем предполагается, что $\psi(x) \neq 0$ на множестве положительной меры. Цель настоящей заметки — дать пример такой функции. Эта функция имеет вид:

$$F(x) = \omega(f(x)),$$

* Это значит, что каждый интервал числовой оси длины L содержит по крайней мере одно из чисел $\{\tau\}$.

** Функция $\varphi(x)$ почти периодична S ([3]), если она суммируема на любом конечном интервале, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $L(\varepsilon)$ такое, что L-относительно плотное множество чисел $\{\tau\}$ дает место неравенству:

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+1} |\varphi(x+\tau) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon, \quad -\infty < \alpha < \infty.$$

где $f(x)$ — действительная почти-периодическая функция,

$$0 < f(x) \leqslant 1, \quad \inf_x f(x) = 0;$$

$\omega(u)$ — непрерывная функция (не равномерно непрерывная) на интервале $0 < u \leqslant 1$.

Эти функции мы определим следующим образом:

$$\omega(u) = \sin\frac{\pi}{2u}, \quad 0 < u \leqslant 1.$$

Функция $f(x)$ (предельно периодическая) определяется так: каждое целое число N единственным образом может быть представлено в виде:

$$N = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3^2 + \ldots + \alpha_n \cdot 3^n, \quad \alpha_i = 0, +1, -1. \tag{4}$$

Если для данного N имеем: $\alpha_k = 0$, $\alpha_{k'} \neq 0$ при $k' < k$, мы скажем, что интервал $\left(N - \frac{1}{2}, N + \frac{1}{2}\right)$ есть интервал ранга k, I_k.

В I_k определим функцию $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{k+2}, \qquad N - \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant N + \frac{1}{4};$$

$$f(x) = 1 - 4\frac{k+1}{k+2}\left(x - N + \frac{1}{2}\right), \quad N - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant N - \frac{1}{4};$$

$$f(x) = 1 + 4\frac{k+1}{k+2}\left(x - N - \frac{1}{2}\right), \quad N + \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant N + \frac{1}{2}.$$

Построенная функция $f(x)$ равномерно непрерывна (она удовлетворяет условию Липшица с постоянной 4). Эта функция почти периодическая; в самом деле, прибавление к аргументу числа $m \cdot 3^{k+1}$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ не изменяет ранга интервала $I_{k'}$, $k' \leqslant k$; интервалы ранга $> k$ переходят в интервалы ранга $> k$.

Следовательно

$$f(x + m \cdot 3^{k+1}) = f(x), \quad x \in I_{k'}, \quad k' \leqslant k.$$

$$|f(x + m \cdot 3^{k+1}) - f(x)| \leqslant \frac{2}{k+3}, \quad x \in I_l, \ l > k.$$

Таким образом все числа $\tau = m \cdot 3^{k+1}$ являются почти-периодами $f(x)$ для $\varepsilon > \frac{2}{k+3}$. Кроме того, если $\varepsilon < \frac{1}{(k+2)(k+3)}$, все почти-периоды $\tau(\varepsilon)$ заключены в интервалах $\left(m \cdot 3^{k+1} - \frac{\varepsilon}{4}, m \cdot 3^{k+1} + \frac{\varepsilon}{4}\right)$.

Исследуем теперь свойства функции

$$F(x) = \sin\frac{\pi}{2f(x)}. \tag{5}$$

В интервалах $I_{k'}$, $k' \leqslant k$, мы имеем:

$$F(x + m \cdot 3^{k+1}) = F(x).$$

Число $\tau = m \cdot 3^{k+1}$, $m \equiv \pm 1 \pmod 3$, имеет разложение

$$\tau = \pm 3^{k+1} + \beta_{k+2} 3^{k+2} + \beta_{k+3} 3^{k+3} + \ldots \pm 3^s. \tag{6}$$

Существует относительно плотное множество интервалов ранга $k+1$, I'_{k+1}, у которых в разложении (4) числа N имеем: $\alpha_{k+1} = 0$, $\alpha_{k+2} +$

$+\beta_{k+2}=0$; тогда, если $x \in I'_{k+1}$, то $x+\tau$ входит в интервал I_{k+2} ранга $k+2$, и для $N-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant N+\frac{1}{4}$ мы имеем:

$$|F(x+\tau)-F(x)|=\left| \sin \frac{\pi(k+3)}{2} - \sin \frac{\pi(k+2)}{2} \right| = 1, \tag{7}$$

т. е. ни один почти-период для $f(x)$ вида (6) не является почти-периодом для $F(x)$ То же равенство (7) имеет место для всякого числа вида $\tau \pm \delta$, при $\delta < \frac{1}{8}$, в интервале $\left(N-\frac{1}{8},\ N+\frac{1}{8}\right)$. Но мы видели, что все ε — почти-периоды функции $f(x)$ имеют вид $\tau \pm \delta$, где $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$. Следовательно $F(x)$ для достаточно малого ε вовсе не имеет почти-периодов как в смысле Бора, так и в смысле S.

Легко убедиться, что $F(x)$ принадлежит классу W. В самом деле, на любом отрезке длины 3^{k+1} число интервалов $I_{k'}$, $k' \geqslant k$, равно 2^k. Поэтому

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |F(x+m\cdot 3^{k+1})-F(x)|\,dx \leqslant \frac{2}{T}\left(\frac{T}{3^{k+1}}+1\right)\cdot 2^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} + \frac{2^{k+1}}{T}.$$

Это выражение будет $<\varepsilon$, если мы выберем сначала k так, чтобы было $\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ (тогда $L(\varepsilon)=3^{k+1}$), а затем T так, что $\frac{2^{k+1}}{T} < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. $T(\varepsilon)=\frac{2^{k+2}}{\varepsilon}$.

Функция $F(x)$ принадлежит также недавно рассмотренному одним из авторов ([3]) классу, содержащему в себе почти-периодические функции Бора и характеризующемуся следующими условиями:

I. Для всякого интервала $(-N, +N)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество чисел $\{\tau\}$ таких, что

$$|F(x+\tau)-F(x)| < \varepsilon \text{ при } -N \leqslant x \leqslant N.$$

II. Если для данного N число τ' соответствует ε' и число τ'' соответствует ε'', то $\tau'+\tau''$ соответствует $\delta(\varepsilon', \varepsilon'')$, причем δ стремится к нулю, когда $\varepsilon', \varepsilon'' \to 0$.

$F(x)$ удовлетворяет этим условиям, как и всякая функция вида $\sin \frac{\pi}{2f(x)}$, где $f(x)$—почти-периодическая функция Бора,

$$f(x) > 0, \ \inf_x f(x) = 0.$$

В самом деле,

$$|F(x+\tau)-F(x)| \leqslant 2\left|\sin \frac{\pi[f(x+\tau)-f(x)]}{2f(x+\tau)\cdot f(x)}\right|.$$

Пусть $f(x) \geqslant k > 0$ в интервале $-N \leqslant x \leqslant N$; если τ (а также τ') является почти-периодом для $f(x)$ по отношению к $\varepsilon < \frac{k}{4}$, то

$$|F(x+\tau)-F(x)| < \frac{2\pi\varepsilon}{k^2},\ |F(x+\tau+\tau'')-F(x)| < \frac{4\pi\varepsilon}{k^2},$$

откуда следуют свойства I и II.

Доказано [3], что функция рассматриваемого класса, если она кроме того удовлетворяет условиям:

$$a(\lambda)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{+T}F(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx,$$

существует для всякого действительного λ;

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{+T}|F(x)|^2\,dx<\infty$$

однозначно определяется своим рядом Фурье, т. е. такая функция тождественно равна нулю, если все коэффициенты ряда Фурье равны 0. Так как наша функция $F(x)$ принадлежит классу W, то она удовлетворяет обоим дополнительным условиям.

Докажем теперь, что $F(x)$ не может быть представлена в форме (2). Допустим, что

$$F(x)=\varphi(x)+\psi(x), \tag{2}$$

φ и $\psi\in L_1$, φ—почти-периодическая S, а ψ удовлетворяет (3). Из тождества (2) следует:

$$\int\limits_x^{x+h}F(\alpha)\,d\alpha=\int\limits_x^{x+h}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\int\limits_x^{x+h}\psi(\alpha)\,d\alpha,$$

или

$$F_1(x)=\varphi_1(x)+\psi_1(x).$$

Функция $F_1(x)$ принадлежит тому же классу, что $F(x)$, φ_1 есть почти-периодическая функция Бора; следовательно их разность $\psi_1(x)=$ $=F_1(x)-\varphi_1(x)$ принадлежит к классу функций, однозначно определяемых рядом Фурье. Но в силу свойства (3) для $\psi(x)$ все коэффициенты ряда Фурье для $\psi_1(x)$ равны нулю, т. е. $\psi_1(x)\equiv 0$, или иначе

$$\int\limits_x^{x+h}F(\alpha)\,d\alpha=\int\limits_x^{x+h}\varphi(\alpha)\,d\alpha.$$

Следовательно $F(x)-\varphi(x)$ есть периодическая функция периода h; но вследствие свойства (3) она почти всюду равна нулю, что и требовалось доказать.

Поступило
28 XII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Math. Ann., **97**, 328—356 (1926). [2] W. Stepanoff, Math. Ann., **95**, 473—498 (1926). [3] Б. Левитан, ДАН, XVII, 283—284 (1937).