Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 8

ФИЗИКА

К. В. НИКОЛЬСКИЙ

К ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 17 I 1939)

1. Единственным основанием теории релятивистских квантовых частиц, имеющих электрический заряд, в настоящее время является известное уравнение Дирака(1), определяющее изменение состояния частицы под действием внешнего электромагнитного поля. Эти уравнения в первоначальном их виде являются механическими квантовыми уравнениями релятивистской квантовой задачи одного тела. В настоящее же время можно считать несомненным, что релятивистские квантовые задачи принципиально являются задачами неопределенного числа частиц. Необходимо следовательно формулировать уравнения Дирака так, чтобы стал возможным естественный переход от задачи одного тела к задаче с неопределенным, в квантовом смысле, числом частиц. Как известно, этот переход частично осуществляется так называемым «методом вторичного квантования» и предполагает рассмотрение взаимодействия частиц посредством электромагнитного поля, также рассматриваемого как квантовая система. Не касаясь пока метода вторичного квантования, мы отметим, что уравнения Дирака, являясь квантовыми уравнениями движения, описывают механические свойства электрона, но вместе с тем они выражают и свойства электрона, понимаемого как целостная электродинамическая система. Эта сторона уравнений Дирака выражается например в совершенно своеобразном «расщеплении» динамических величин на «механические» и «электродинамические». Так например, для скорости мы имеем оператор dx_k/dt и оператор $c\alpha_k$; имеем операторы для магнитного момента электрона и т.д. Таким образом уравнения Дирака можно рассматривать не только как механические уравнения движения, но также как уравнения поля. Эта точка зрения целесообразна в вопросах дальнейшего развития квантовой теории с целью исследования вопросов, связанных с задачей массы частиц.

Своеобразие уравнений Дирака заключается в том, что они выражены не посредством обычного тензорного аппарата теории относительности, а посредством спинорных отношений (2). Однако возможно и в целях сравнения уравнений Дирака с уравнениями других теорий поля целесообразно найти формулировку теории в тензорных, обыкновенных соотношениях. Для этого надо перейти от ψ_ρ и ψ_ρ^+ и их производных к образующимся из них тензорам и инвариантам и исследовать соотношения, существующие между ними вследствие уравнений Дирака. Получающаяся так система тензорных уравнений* может быть рассмотрена на общих для уравнений теорий поля основаниях и подвергнута затем квантованию и нелинейной модификации для учета роли массы.

Поставленная таким образом задача будет разрешена в том случае, если будет найдена соответствующая так полученной системе уравнений* л а г р а н ж е в а ф у н к ц и я, зависящая от величин, однозначно описывающих электрон как электродинамическую систему. Далее, инвариантность лангранжевого интеграла по отношению к релятивистским преобразованиям координат и времени всегда позволяет найти тензор энергии материи этой системы и вместе с ним основные законы сохранения энергии и импульса и другие законы сохранения.

В этой заметке рассматривается частично только первая часть задачи, а именно находятся некоторые тензоры и инварианты и их связывающие уравнения, характеризующие электрон Дирака.

2. Пользуясь следующим прямым и несколько громоздким способом, мы получим искомые тензорные уравнения.

Возьмем уравнения Дирака в следующей известной форме [3]:

$$\left[\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu\right) + \frac{mc}{\hbar}\right] \psi = 0, \qquad (A)$$

$$\left[\sum_{\mu=1}^{4} \tilde{\gamma}_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu\right) - \frac{mc}{\hbar}\right] \psi^+ = 0, \qquad (B)$$

где $\sim$ обозначает транспонированную матрицу. Умножая первое уравнение на $\psi^+\alpha$, а второе — на $\psi\alpha$ (при α одной из 16 матриц $1, \gamma_k, \gamma_k\gamma_l, \gamma_5\gamma_k\gamma_l$, γ_5 $k, l = 1, 2, 3, 4$) и складывая и вычитая полученные уравнения, мы найдем 32 уравнения, анализ которых и позволяет дать теории Дирака тензорную форму. Объясняется это тем, что ψ и ψ^+ являются спинорами половинного ранга, и потому билинейные в ψ, ψ^+ и их производных величины имеют тензорные свойства. Вычислим последовательно все 32 уравнения. Умножая (A) на ψ^+ и (B) на ψ и складывая, мы получим известное уравнение для тока:

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\psi^+\gamma_\mu\psi) = 0. \qquad (1)$$

Вычитая же, получим уравнение, определяющее инвариант $\psi^+\psi$:

$$\sum_{\mu=1}^{4} \left(\psi^+\gamma_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\psi^+}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\psi + \frac{2ie}{\hbar c}\psi^+\gamma_\mu\psi\right) + \frac{2mc}{\hbar}\psi^+\psi = 0. \qquad (2)$$

Умножая (A) на $\psi^+\gamma_k$, а (B) на $\psi\tilde{\gamma}_k$ и складывая, получим (по латинским индексам суммирование не производится):

$$\sum_{\mu=1}^{4} \left[\psi^+\gamma_k\gamma_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} + \psi\tilde{\gamma}_k\tilde{\gamma}_\mu \frac{\partial\psi^+}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu(\psi^+\gamma_k\gamma_\mu\psi - \psi\tilde{\gamma}_k\tilde{\gamma}_\mu\psi^+)\right] +$$

$$+ \frac{mc}{\hbar}(\psi^+\gamma_k\psi - \psi\tilde{\gamma}_k\psi^+) = 0,$$

---

* Заметим еще, что эта система уравнений является решением задачи описания квантовой системы посредством Eichinvariant-ных величин, т. е. экспериментально измеримых. Такие же величины, как ψ_ρ и потенциалы, в эту систему уравнений явно не входят, включаясь в Eichinvariant-ные величины и определяясь ими.

так как $a\tilde{\gamma}b = \widetilde{b\gamma a}$ и $\gamma_\alpha\gamma_\beta = \widetilde{\gamma_\beta\gamma_\alpha}$, где γ — любая матрица, то уравнение перепишется:

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left\{\left[\psi^{+}\gamma_k\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\gamma_k\psi\right]+\frac{ie}{\hbar c}\cdot\varphi_\mu\left[\psi^{+}\gamma_k\gamma_\mu\psi-\psi^{+}\gamma_\mu\gamma_k\psi\right]\right\}+$$

$$+\frac{mc}{\hbar}\left(\psi^{+}\gamma_k\psi-\psi^{+}\gamma_k\psi\right)=0.$$

Воспользовавшись антикоммутативностью γ_k $\gamma_k\gamma_l+\gamma_l\gamma_k=2\delta_{kl}$, найдем четыре уравнения:

$$\sum_{\mu\neq k}^{4}\left(\psi^{+}\gamma_k\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_\mu}\gamma_k\gamma_\mu\psi+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_\mu\psi^{+}\gamma_k\gamma_\mu\psi\right)+\frac{\partial\psi^{+}\psi}{\partial x_k}=0. \qquad (3-6)$$

$$k=1,2,3,4$$

Операция вычитания дает в данном случае:

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left[\psi^{+}\gamma_k\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\gamma_k\psi+\frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu\left[\psi^{+}\gamma_k\gamma_\mu\psi+\psi^{+}\gamma_\mu\gamma_k\psi\right]\right]+\frac{2mc}{\hbar}\psi^{+}\gamma_k\psi=0,$$

т. е. еще четыре уравнения:

$$\sum_{\mu\neq k}^{4}\left[\frac{\partial\psi^{+}\gamma_k\gamma_\mu\psi}{\partial x_\mu}\right]+\left(\psi^{+}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_k}\psi+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_k\psi^{+}\psi\right)+\frac{2mc}{\hbar}\psi^{+}\gamma_k\psi=0. \qquad (7-10)$$

Умножая (A) на $\psi^{+}\gamma_k\gamma_l$ и (B) на $\psi\tilde{\gamma}_l\tilde{\gamma}_k$, вычитая и складывая, получим:

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left[\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\mp\psi\tilde{\gamma}_l\tilde{\gamma}_k\tilde{\gamma}_\mu\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_\mu}+\frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu(\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\psi\pm\right.$$

$$\left.\pm\psi\tilde{\gamma}_l\tilde{\gamma}_k\tilde{\gamma}_\mu\psi)\right]+\frac{mc}{\hbar}\left[\psi^{+}\cdot\gamma_k\gamma_l\psi\pm\psi\tilde{\gamma}_l\tilde{\gamma}_k\psi^{+}\right]=0,$$

так как $a\tilde{\gamma}_l\tilde{\gamma}_k\tilde{\gamma}_\mu b=a\,(\overline{\gamma_\mu\gamma_k\gamma_l})\,b=b\,(\gamma_\mu\gamma_k\gamma_l)\,a$, то мы получим:

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left[\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\mp\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\gamma_k\gamma_l\psi+\frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu(\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\psi\pm\right.$$

$$\left.\pm\psi^{+}\gamma_\mu\gamma_k\gamma_l\psi)\right]+\frac{mc}{\hbar}\left[\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\psi\pm\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\psi\right]=0.$$

Взяв нижний знак, получим следующие уравнения:

$$\sum_{\mu\neq k,l}^{4}\left[\frac{\partial\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\psi}{\partial x_\mu}\right]+\left(\psi^{+}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_l}-\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_l}\gamma_k\psi+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_l\psi^{+}\gamma_k\psi\right)-$$

$$-\left(\psi^{+}\gamma_l\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_k}\gamma_l\psi+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_k\psi^{+}\gamma_l\psi\right)=0. \qquad (11-16)$$

$$k,l=1,2,3,4;\quad (k,l)=(1,4),(2,4),(3,4),(1,3),(2,3),(1,2).$$

Взяв верхний знак, получим:

$$\sum_{\mu\neq k,\,l}^{4}\left[\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_\mu}\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\psi+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_\mu\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\psi\right]+$$

$$+\frac{\partial\psi^{+}\gamma_k\psi}{\partial x_l}-\frac{\partial\psi^{+}\gamma_l\psi}{\partial x_k}+\frac{2mc}{\hbar}\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\psi=0. \qquad (17-22)$$

Умножая на $\psi^+\gamma_5\gamma_k$ и $\tilde\psi\tilde\gamma_k\tilde\gamma_5$ соответственно и затем складывая и вычитая, получим:

$$\sum_{\mu=1}^{4}\Big[\psi^+\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\mp\tilde\psi\tilde\gamma_k\tilde\gamma_5\tilde\gamma_\mu\frac{\partial\psi^+}{\partial x_\mu}+\psi^+\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\psi\frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu\pm$$
$$\pm\tilde\psi\tilde\gamma_k\tilde\gamma_5\tilde\gamma_\mu\psi^+\frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu\Big]+\frac{mc}{\hbar}(\psi^+\gamma_5\gamma_k\psi\pm\tilde\psi\tilde\gamma_k\tilde\gamma_5\psi^+)=0.$$

$$\sum_{\mu=1}^{4}\Big[\psi^+\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\mp\frac{\partial\psi^+}{\partial x}\gamma_\mu\gamma_5\gamma_k\psi+\frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu(\psi^+\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\psi\pm\psi^+\gamma_\mu\gamma_5\gamma_k\psi)\Big]+$$
$$+\frac{mc}{\hbar}(\psi^+\gamma_5\gamma_k\psi\pm\psi^+\gamma_5\gamma_k\psi)=0.$$

Выделяя член с $k=\mu$, получим:

$$\psi^+\gamma_5\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\pm\frac{\partial\psi^+}{\partial x_k}\gamma_5\psi+\frac{ie}{\hbar c}\varphi_k(\psi^+\gamma_5\psi\mp\psi^+\gamma_5\psi)+$$
$$+\sum_{\mu\neq k}^{4}\Big[\psi^+\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\mp\frac{\partial\psi^+}{\partial x_\mu}\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\psi+\frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu(\psi^+\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\psi\pm$$
$$\pm\psi^+\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\psi)\Big]+\frac{mc}{\hbar}(\psi^+\gamma_5\gamma_k\psi\pm\psi^+\gamma_5\gamma_k\psi)=0.$$

Взяв верхний знак, найдем:

$$\frac{\partial\psi^+\gamma_5\psi}{\partial x_k}+\sum_{\mu\neq k}^{4}\Big(\psi^+\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\psi^+}{\partial x_\mu}\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_\mu\psi^+\gamma_5\gamma_k\psi\Big)+$$
$$+\frac{2mc}{\hbar}\psi^+\gamma_5\gamma_k\psi=0\qquad(k=1,\,2,\,3,\,4).\qquad(23\text{—}26)$$

Взяв нижний знак:

$$\sum_{\mu\neq k}^{4}\frac{\partial\psi^+\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\psi}{\partial x_\mu}+\Big(\psi^+\gamma_5\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\frac{\partial\psi^+}{\partial x_k}\gamma_5\psi+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_k\psi^+\gamma_5\psi\Big)=0\quad k=(1,2,3,4)\quad(27\text{—}30)$$

Наконец, умножая на $\psi^+\gamma_5$ и $\tilde\psi\gamma_5$ (A) и (B), соответственно складывая или вычитая, получим:

$$\sum_{\mu=1}^{4}\Big(\psi^+\gamma_5\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\pm\tilde\psi\tilde\gamma_5\tilde\gamma_\mu\frac{\partial\psi^+}{\partial x_\mu}+\frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu(\psi^+\gamma_5\gamma_\mu\psi\mp\tilde\psi\tilde\gamma_5\tilde\gamma_\mu\psi^+)\Big)+$$
$$+\frac{mc}{\hbar}(\psi^+\gamma_5\psi\mp\tilde\psi\tilde\gamma_5\psi^+)=0,$$

т. е. следующие два уравнения

$$\sum_{\mu=1}\Big(\psi^+\gamma_5\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}\mp\frac{\partial\psi^+}{\partial x_\mu}\gamma_5\gamma_\mu\psi+\frac{ie}{\hbar c}\varphi_\mu(\psi^+\gamma_5\gamma_\mu\psi\pm\psi^+\gamma_5\gamma_\mu\psi)\Big)+$$
$$+\frac{mc}{\hbar}(\psi^+\gamma_5\psi\mp\psi^+\gamma_5\psi)=0,$$

т. е.

$$\sum_{\mu=1}^{4}\Big(\psi^+\gamma_5\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\psi^+}{\partial x_\mu}\gamma_5\gamma_\mu\psi+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_\mu\psi^+\gamma_5\gamma_\mu\psi\Big)=0\qquad(31)$$

и

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial\psi^{+}\gamma_{5}\gamma_{\mu}\psi}{\partial x_{\mu}}\right)+\frac{2mc}{\hbar}\psi^{+}\gamma_{5}\psi=0. \qquad (32)$$

3. Рассмотрим полученные 32 уравнения. Часть из них была найдена различными авторами более ли менее формальным путем. Так, уравнение (1) выведено Дираком ([4]) и известно как закон сохранения электрического тока в теории электрона. Уравнение (32) получено Уленбеком и Ляпортом ([5]) вместе с некоторыми другими уравнениями. Далее, некоторые из уравнений указаны были Ф. Вишневским ([6]), рассматривавшим уравнение Дирака в связи с уравнениями Максвелла. Наконец соотношения (11—16) употреблялись при исследовании вопроса о тензоре энергии материи [Тетроде ([7]), Вейль ([8]), Розенфельд ([9]) и др.], остающегося все еще не вполне выясненным. Обращаясь к уравнениям, мы получаем прежде всего четыре релятивистских вектора, из которых три удовлетворяют уравнениям сохранения и четвертый — «уравнению несохранения», установленному Уленбеком и Ляпортом, а именно:

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}(\psi^{+}\gamma_{\mu}\psi)=0, \qquad (1)\ (\alpha_1)$$

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_{k}}\left(\psi^{+}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_{k}}-\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_{k}}\psi+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_{k}\psi^{+}\psi\right)=0, \qquad (\alpha_2)$$

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_{k}}\left(\psi^{+}\gamma_{5}\frac{\partial\psi}{\partial x_{k}}-\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_{k}}\gamma_{5}\psi+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_{k}\psi^{+}\gamma_{5}\psi\right)=0, \qquad (\alpha_3)$$

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_{k}}(\psi^{+}\gamma_{5}\gamma_{\mu}\psi)+\frac{2mc}{\hbar}\psi^{+}\gamma_{5}\psi=0. \qquad (32)(\alpha_4)$$

Назовем эти релятивистские векторы u_k, I_k, $I_{5,k}$, $u_{5,k}$ соответственно, u_k, I_k, $I_{5,k}$ и u_{5k} связаны с антисимметрическими тензорами, а именно имеют место следующие уравнения:

$$-\frac{2mc}{\hbar}u_{k}=I_{k}+\sum_{\mu\neq k}^{4}\frac{\partial\psi^{+}\gamma_{k}\gamma_{\mu}\psi}{\partial x_{\mu}} \qquad k=1,2,3,4 \text{ (уравнения } 7-10) \qquad (\beta_1)$$

$$I_{5,k}=-\sum_{\mu\neq k}^{4}\frac{\partial\psi^{+}\gamma_{5}\gamma_{k}\gamma_{\mu}\psi}{\partial x_{\mu}} \qquad k=1,2,3,4, \text{ (уравнения } 27-30) \qquad (\beta_2)$$

и

$$-\frac{2mc}{\hbar}u_{5,k}=\sum_{\mu\neq k}^{4}\left(\psi^{+}\gamma_{5}\gamma_{k}\gamma_{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x_{\mu}}-\frac{\partial\psi^{+}}{\partial x_{\mu}}\gamma_{5}\gamma_{k}\gamma_{\mu}\psi+\frac{2ie}{\hbar c}\varphi_{\mu}\psi^{+}\gamma_{5}\gamma_{k}\gamma_{\mu}\psi\right)+\frac{\partial\psi^{+}\gamma_{5}\psi}{\partial x_{k}}. \qquad (\beta_3)$$

(уравнения 23—26)

Два антисимметрических тензора $\psi^{+}\gamma_{k}\gamma_{\mu}\psi$ и $\psi^{+}\gamma_{5}\gamma_{k}\gamma_{\mu}\psi$, связанные с I_k и $I_{5,k}$ уравнениями (7—10) и (27—30), являются дуальными тензорами вследствие соотношения

$$\gamma_{1}\gamma_{2}\gamma_{3}\gamma_{4}=\alpha\gamma_{5}, \qquad (33)$$

где α — число.

Таблицы компонент этих тензоров связаны друг с другом следующим образом (мы выписываем только половину компонент вследствие их антисимметричности):

$$\left\{\begin{matrix} 0; & \gamma_5\gamma_1\gamma_2; & \gamma_5\gamma_1\gamma_3; & \gamma_5\gamma_1\gamma_4 \\ & 0; & \gamma_5\gamma_2\gamma_3; & \gamma_5\gamma_2\gamma_4 \\ & & 0; & \gamma_5\gamma_3\gamma_4 \\ & & & 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 & -\alpha\gamma_3\gamma_4, & +\alpha\gamma_2\gamma_4, & -\alpha\gamma_2\gamma_3 \\ & 0 & -\alpha\gamma_1\gamma_4, & +\alpha\gamma_1\gamma_3 \\ & & 0 & -\alpha\gamma_1\gamma_2 \\ & & & 0 \end{matrix}\right\} \qquad (34)$$

Напомним, что дуальные тензоры Φ_{kl} и Φ^*_{kl} связаны между собой так, что «расходимость» одного служит «циклом» другого, а именно:

$$\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial \Phi e}{\partial x^k} + \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Phi^*_{ik}}{\partial x^k}. \qquad (35)$$

Таким образом мы можем заменить в (β_1) расходимость тензора

$$\Phi_{k\mu} = \psi^+\gamma_k\gamma_\mu\psi \qquad (\gamma_1)$$

«циклом» (четырехмерным ротором) дуального тензора

$$\Phi^*_{k\mu} = \Phi_{5k\mu} = \psi^+\gamma_5\gamma_k\gamma_\mu\psi. \qquad (\gamma_2)$$

Возможно также объединить (β_1) и (β_2) в одну систему уравнений максвеллова типа с одним из тензоров (γ_1) или (γ_2) (ср. Вишневский).

Далее мы получаем еще два антисимметрических тензора, а именно

$$T_{kl} = \left(\psi^+\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_l} - \frac{\partial\psi^+}{\partial x_l}\gamma_k\psi + \frac{2ie}{\hbar c}\varphi_l\psi^+\gamma_k\psi\right) -$$

$$-\left(\psi^+\gamma_l\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi^+}{\partial x_k}\gamma_l\psi + \frac{2ie}{\hbar c}\varphi_k\psi^+\gamma_l\psi\right) = -\sum_{\mu\neq k,l}\frac{\partial\psi^+\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\psi}{\partial x_\mu} \text{ (уравнения 11 — 16)} \qquad (\gamma_3)$$

и

$$\theta_{kl} = \frac{\partial\psi^+\gamma_k\psi}{\partial x_l} - \frac{\partial\psi^+\gamma_l\psi}{\partial x_k} =$$

$$= -\sum_{\mu\neq k,l}^{4}\left(\psi^+\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\psi^+}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\gamma_l\gamma_k\psi + \frac{2ie}{\hbar c}\varphi_\mu\psi^+\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\psi\right) - \frac{2mc}{\hbar}\psi^+\gamma_k\gamma_l\psi, \qquad (\gamma_4)$$

(уравнения 17 — 22)

причем

$$\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = 0, \quad \text{т. е. } \frac{\partial T^*_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial T^*_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial T^*_{li}}{\partial x^k} = 0 \qquad (\delta_1)$$

и

$$\frac{\partial\theta_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial\theta_e}{\partial x^k} + \frac{\partial\theta_{kl}}{\partial x^i} = 0. \qquad (\delta_2)$$

Антисимметрический тензор T_{kl} или дуальный T^*_{kl} находится в непосредственной связи с тензором энергии материи уравнения Дирака, как указано Тетроде.

Уравнение (γ_4) замечательно тем, что оно связывает I_k с тензором Φ_{kl}, который в свою очередь уравнениями (β_1) определяет вектор I_k.

Положив

$$\theta_{kl} = S_{kl} - \frac{2mc}{\hbar}\Phi_{kl} \qquad (\gamma_4')$$

и воспользовавшись (δ_2), найдем:

$$\frac{\partial S_{kl}}{\partial x^l}+\frac{\partial S_e}{\partial x^k}+\frac{\partial S_{kl}}{\partial x^i}=-\frac{2mc}{\hbar}\left(\frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial x^l}+\frac{\partial \Phi_e}{\partial x^k}+\frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial x^i}\right).$$

Но правая часть этого уравнения равна, с точностью до постоянного множителя $\frac{2mc}{\hbar}$, правой части уравнения (β_2), и таким образом мы получаем уравнение:

$$I_{5,k}=\frac{\hbar}{2mc}\left(\frac{\partial S_{kl}}{\partial x^l}+\frac{\partial S_e}{\partial x^k}+\frac{\partial S_{kl}}{\partial x^i}\right), \tag{β_4}$$

связывающее ток $I_{5,k}$ с антисимметрическим тензором S_{kl}. Далее, тензор T_{kl} выражается через вектор $u_{k,5}$, удовлетворяющий уравнению Уленбека-Ляпорта (α_4).

В самом деле, вследствие (33) вектор $u_{k,5}$ может быть написан через величины $\psi^{+}\gamma_k\gamma_l\gamma_\mu\psi$, стоящие справа в уравнении (γ_3), а именно вектор $u_{k,5}$ является антисимметрическим тензором третьего ранга, причем:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1\gamma_2\gamma_3&=\alpha\gamma_5\gamma_4\\ -\gamma_2\gamma_3\gamma_4&=\alpha\gamma_5\gamma_1\\ \gamma_1\gamma_3\gamma_4&=\alpha\gamma_5\gamma_2\\ -\gamma_1\gamma_2\gamma_4&=\alpha\gamma_5\gamma_3 \end{aligned}\right\}. \tag{36}$$

Таким образом уравнения (γ_3) и (α_4) образуют систему, определяющую $u_{5,k}$ через T_{kl} и инвариант $\psi^{+}\gamma_5\psi$. Если ввести обозначения (H и E) для компонент тензора $\Phi_{k\mu}$ и затем обозначить чертой сверху величины типа

$$T_{\lambda\mu}=\text{const}\left(\bar{\psi}\alpha_\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\alpha_\lambda\psi+2i\varphi_\mu\bar{\psi}\alpha_\lambda\psi\right), \tag{37}$$

мы можем придать системе уравнений следующий наглядный вид:

$$\left.\begin{aligned} &-\overline{(\psi^{+}\psi)_t}+\operatorname{div}H=0\\ &-\frac{\partial H}{\partial x_4}+\operatorname{grad}\rho=\operatorname{curl}E\\ &\overline{(\gamma_5)}+\operatorname{div}E+\lambda u_4=0\\ &\frac{\partial E}{\partial x_4}+\overline{\operatorname{grad}\gamma_5}+u=\operatorname{curl}H\\ &\frac{\partial u_{5,k}}{\partial x_4}+\operatorname{grad}u_{5,k}+\overline{\operatorname{curl}u}=0\\ &\frac{\overline{\partial u_{5,k}}}{\partial x_4}+\overline{\operatorname{grad}u_{5,k}}+\operatorname{curl}u=\lambda H\\ &\frac{\partial u_4}{\partial x_4}+\operatorname{grad}u_4+\overline{\operatorname{curl}u_{5,k}}=\lambda E\\ &-\frac{\overline{\partial u}}{\partial t}+\overline{\operatorname{grad}u_4}+\operatorname{curl}u_{5,k}=0 \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

и т. д.

Эти соотношения весьма аналогичны соотношениям теории поля Ми. К этим соотношениям мы должны добавить уравнения, в которые входят инварианты $\psi^{+}\psi$ и $\psi^{+}\gamma_5\psi$, а именно уравнения (2), определяющие лагранжеву функцию уравнений Дирака первого порядка и т. д.

Мы видим прежде всего, что в уравнения входят два типа величин: билинейные в ψ и ψ^{+} и затем эрмитовы формы типа (37), содержащие производные от ψ и ψ^+. Все эти величины являются Eichinvariant'ными величинами, т. е. поддающимися измерению.

Отметим далее следующее. Между билинейными формами в ψ, ψ^+ имеются совершенно от ψ и ψ^+ независимые тождества ([10]), позволяющие выразить все их через 6 независимых (общее число форм равно 16). Точно так же имеются тождественные соотношения между величинами типа (37), так как это—тоже билинейные формы в ψ и $f_{\alpha\beta} = \partial\psi_\alpha/\partial x_\beta$. Однако эти соотношения до сих пор не исследовались. Таким образом для решения задачи, постановке которой посвящена эта заметка (т. е. задачи формулировки уравнений Дирака в форме тензорных уравнений и сравнения их, понимаемых как уравнения теории поля, с уравнениями других теорий поля), должно найти все тождества между $T_{\lambda\mu}$. Выразив их все через независимые, мы найдем уравнения для последних. Заметим однако, что эта задача может быть решена посредством метода однородных гексасферических координат, позволяющего понять смысл перехода к ψ_ρ от уравнений поля, совершаемого при формулировке уравнений Дирака.

Физический институт им. П. Н. Лебедева.
Академия Наук СССР.
Москва.

Получено
17 I 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A), **117**, 610 и **118**, 351 (1928). [2] V. d. Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Leipzig (1932). [3] W. Pauli, Handbuch der Physik, **24**. [4] P. A. M. Dirac, l. c. [5] G. Uhlenbeck u. O. Laporte, Phys. Rev., **37**, 1380 (1931). [6] F. I. v. Wiesniewsky, ZS. f. Phys., **66**, 697 (1930). [7] H. Tetrode, ZS. f. Phys., **50**, 336 (1928). [8] H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik. [9] L. Rosenfeld, Ann. d. Phys., (5) **5**, 113 (1930). [10] ZS. f. Phys., **83**, 284 (1933); ZS. f. Phys., **65**, 273 (1930). R. Zaycoff, Ann. d. Phys., **9**, 715 (1931).