Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 8

ФИЗИКА

К. В. НИКОЛЬСКИЙ

К ПОСТАНОВКЕ ПРОБЛЕМЫ МАССЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЧАСТИЦЫ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 17 I 1939)

Анализ взаимодействий, ведущих к образованию собственной массы элементарной частицы, является одной из серьезнейших задач атомной физики. Постановка этой, остающейся до сих пор неразрешенной, задачи претерпела значительные изменения с развитием атомной физики. В начале 20-го века предполагалось, что принципы лорентцевской электронной теории позволяют решить и эту задачу. В соответствии с этим считалось, что всякая масса имеет электромагнитное происхождение. Первоначальные попытки решения этой задачи исходили из представления электрона в виде объемного электрического заряда, масса которого m_0 определялась его зарядом e и радиусом r_0. Если c — скорость света, то по порядку величины должно быть

$$r_0 \sim e^2/mc^2.$$

Дальнейшее развитие теории показало, что объемный электрон несовместим с требованием релятивистской инвариантности. В то же время предлагавшиеся различные варианты концепции точечного электрона также не являются решением задачи, так как они ведут к бесконечно большой энергии собственного поля электрона (1).

Последовательное, релятивистски инвариантное решение этой задачи в рамках доквантовой теории было намечено Г. Ми (2) и Г. Вейлем (3), установившими возможность нелинейного обобщения лорентцевской электродинамики, дающего собственную массу частиц как реакцию ее поля на нее же. В 1934 г. М. Борн и Л. Инфельд (4), независимо от теории Ми, нашли лагранжеву функцию, позволяющую классически получить собственную массу электрона. Основанием при этом кроме требований релятивистского характера было требование конечности электромагнитных полей, т. е. физической нереализуемости полей бесконечно большого напряжения. Однако этот круг идей — чисто классического типа, и до сих пор его связь с квантовыми представлениями надлежаще не выяснена.

Обращаясь к квантовой теории, отметим, что нерелятивистская квантовая механика получила релятивистское уточнение в известных уравнениях Дирака, описывающих квантовую частицу, имеющую заряд и находящуюся под действием внешнего поля. Введение этого механического уравнения для описания электродинамического процесса, каковым является электрон, показало, что квантовая концепция в данном случае ведет к своеобразной, затруднительной для понимания в смысле принципа соответствия характеристике массы частицы, а именно ведет, грубо говоря, как к нормальной положительной собственной массе в общем и к аномальной, отрицательной массе $-m_0c^2$. Уравнение как бы описывает сразу два возможных типа частиц. Известно, что эта особенность релятивистской концепции массы была использована Дираком ([5]) для теории позитрона и электрона, как двух возможных состояний квантовой частицы. При этом существенную роль сыграло то обстоятельство, что эти частицы имеют антисимметрическую статистику.

Из попыток ориентироваться в задаче массы кроме теории Дирака мы упомянем следующие. Г. Вейль ([6]), считая, что масса — гравитационный эффект, предложил попробовать вычеркнуть совсем в уравнениях Дирака член с массой с тем, чтобы получить его, переходя к уравнению общей теории относительности. Возможность эта исследовалась Шредингером ([7]) и Иваненко ([8]) [продолжено Фоком ([9])], причем выяснилось, что уравнение второго порядка в общей теории относительности имеет вид (в обычных обозначениях):

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\nabla_k \sqrt{g}\, g^{kl}\nabla_l\psi - \frac{R}{4}\psi - \frac{1}{2} f_{kl} s^{kl}\psi - \mu^2\psi = 0,$$

где R — инвариант кривизны, f_{kl} — внешнее поле, $s^{kl} = \gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k$, если γ^k — матрицы Дирака, $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ — массовый член уравнения Дирака. Это значит, что, действительно, имеется гравитационный эффект, но он ничтожно мал в сравнении с μ^2, так как μ порядка 10^{11} cm^{-1}. Таким образом вопрос о природе μ остался неразрешенным.

В 1935 г. автор отметил неожиданную связь массового члена с лагранжевой функцией нелинейных полей ([10]).

В настоящее время считается, что, во-первых, масса квантовой частицы не связана непосредственно с электромагнитным полем, и таким образом это не электродинамическая, в классическом смысле, задача, и, во-вторых, что задача анализа массы связана с введением в квантовую теорию константы r_0, причем введение ее означает радикальное изменение квантовых представлений, существенное ограничение области их применения. При этом из некоторых достаточно общих оснований можно предвидеть, что это ограничение квантовых представлений связано с переходом от л и н е й н ы х, основанных на принципе суперпозиции уравнений, рассматриваемых как уравнения классической теории поля «механических волн», к н е л и н е й н о й их модификации. Таким образом масса частицы должна быть связана не с ее электромагнитным полем, а с реакцией ее механического квантового поля на самого себя.

Цель этой заметки показать, что в уравнениях Дирака действительно заключена возможность такого понимания массы.

Напомним, что уравнения Дирака получаются ([11]) вариацией волновых функций $\overline{\psi}_\rho$, ψ_ρ^{+} (спиноров половинного ранга) из вариационного принципа

$$\delta \int L\, d\omega = 0, \tag{1}$$

где

$$L = T^{\sigma.}_{.\sigma} - \frac{m_0 c}{\hbar}\overline{\psi}\alpha_0\psi. \tag{2}$$

Здесь $T^{\sigma}_{.\sigma}$ — компоненты тензора энергии — материи, а

$$\psi^+\psi = \Omega = \sum_{\rho=1}^{4} \psi_\rho^+ \psi_\rho, \tag{3}$$

где Ω — релятивистский инвариант, дающий при вариации по ψ_ρ^+ или по ψ_ρ член с массой в уравнении Дирака для ψ_ρ или ψ_ρ^+. Оставляя в стороне $T^{;\sigma}_{\sigma.}$, рассмотрим второй член в (1). Исследуя его смысл, Л. де-Бройль ([12]) показал, что это — инвариантный интеграл действия частицы, переходящий в классический интеграл, а именно

$$-m_0 c \int^t dt \int \Omega\, dx\, dy\, dz \to -\int^t m_0 c \sqrt{1-\beta^2}\cdot dt, \quad \beta = \frac{v}{c}, \tag{4}$$

где v — скорость частицы. Для того, чтобы убедиться в (4), нужно подставить в (3) значения ψ_ρ, ψ_ρ^+ для случая монохроматической плоской волны.

С другой стороны, в 1935 г. автор ([13]) показал, что этот же интеграл можно представить, как интеграл действия нелинейной электродинамики типа борновской. Мы рассмотрим теперь связь (2) с лагранжевыми функциями полей, полученных в свое время Ми и Вейлем, и установим некоторые следствия для задачи массы.

Как известно, в теории Ми поле описывается двумя антисимметрическими тензорами (и тензорными плотностями) H_{ik} и Φ_{ik} и затем двумя релятивистскими векторами s_k и φ^k, а именно так, что между Φ_{ik} и φ_k имеется заданное при варьировании соотношение, а H_{ik} и s^k определяются, как функции φ^k и Φ_{ik} варьированием, а именно как производные L по φ^k и Φ_{ik}:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial g^{ik}}\, \delta g^{ik} + \frac{1}{2} H^{ik}\delta\Phi_{ik} - s^i\delta\varphi_i, \tag{5}$$

так что

$$H^{ik} = 2\frac{\partial L}{\partial \Phi_{ik}} \quad \text{и} \quad s^i = -\frac{\partial L}{\partial \varphi_i}. \tag{6}$$

Уравнения поля определяются вариацией

$$\delta \int L\, d\omega = 0. \tag{7}$$

Далее между тензорами энергии — материи и полей существует соотношение

$$T_i^k = H^{kr}\Phi_{ir} - s^k\varphi_i - \frac{1}{2} L\delta_i^k, \tag{8}$$

причем, если нет гравитационного поля,

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x_k} = 0. \tag{9}$$

Покажем теперь, что интеграл действия от (3), (4) может быть выражен тождественно, т. е. без введения каких-либо ограничений на ψ_ρ и ψ_ρ^+, через два антисиметрических тензора и два релятивистских вектора точно так же, как в теории типа Ми.

Пусть ψ_ρ, ψ_ρ^+ — какие-либо спиноры половинного ранга (необязательно решения уравнений Дирака). Тогда, образуя из них билинейные формы, мы получим величины, имеющие обыкновенные, тензорные законы преобразования. Из 8 спиноров ψ_ρ, ψ_ρ^+, как известно, можно образовать 16 величин, к числу которых относится и инвариант Ω, а именно, мы найдем таким путем два инварианта, один антисимметрический тензор, один релятивистский вектор и один антисимметрический тензор третьего ранга. Между так полученными величинами, играющими, как известно, фундаментальную роль в теории Дирака, имеются тождественные соотношения, а именно такие, что число независимых величин равно шести. Все эти соотношения были получены автором ([15]) в 1930 г. и независимо Цайковым ([14]) в 1931 г., и мы воспользуемся сейчас ими, употребляя форму, приданную этим соотношениям Цайковым.

Пусть

$$\alpha_k, \alpha_k^+ \qquad (k = 1, 2, 3, 0)$$

матрицы Дирака такие, что

и

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_m^+ \alpha_r + \alpha_r^+ \alpha_m = \alpha_m \alpha_r^+ + \alpha_r \alpha_m^+ = 2\delta_{mr} \\ &\alpha = \pm i \alpha_k \alpha_e^+ \alpha_m \alpha_n^+ \alpha_0 \qquad k \neq e \neq m \neq n \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

тоже антикоммутативная матрица.

Тогда

$$\Omega_0 = \bar{\psi}\alpha_0\psi \quad \text{и} \quad \Omega_1 = \bar{\psi}\alpha\psi \text{ — инварианты,}$$

$$(k \neq l) \quad \Phi_{ke} = i\bar{\psi}\alpha_k \alpha_e^+ \alpha_0 \psi \text{ — антисимметрический тензор,}$$

$$\varphi_k = \bar{\psi}\alpha_k\psi \quad k = 1, 2, 3, 4 \text{ — релятивистский вектор.}$$

Далее

$$\Phi_{kr}\Phi_{kr} - 2\Omega_0^2 + 2\Omega_1^2 \equiv 0, \tag{11}$$

$$\varphi_r\varphi_r + \Omega_0^2 + \Omega_1^2 \equiv 0 \text{ и т. д.} \tag{12}$$

Отсюда

$$\Omega_0 \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\Phi_{kr}\Phi_{kr} - 2\varphi_r\varphi_r}, \tag{13}$$

причем Φ_{kr} выражается через φ_r.

Уравнение (13) можно записать в виде

$$\Omega_0 \equiv \frac{1}{2} H^{ik}\Phi_{ik} - s^i\varphi_i, \tag{14}$$

где

$$H^{ik} = \frac{\Phi_{ik}}{\sqrt{\Phi_{kr}\Phi_{kr} - 2\varphi_r\varphi_r}}, \quad s^i = -\frac{\varphi_i}{\sqrt{\Phi_{kr}\Phi_{kr} - 2\varphi_r\varphi_r}}, \tag{15}$$

причем [сравни с (6)]

$$H^{ik} = 2\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi_{ik}} \quad \text{и} \quad s^i = -\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_i}. \tag{16}$$

Мы не будем здесь рассматривать весьма существенную связь между Ω, L и тензором $T^{\sigma}_{.\sigma}$ [аналогичную (8)], а рассмотрим только выражение $\delta\Omega$, получающееся при вариации по ψ и ψ^+, т. е. рассмотрим новую форму члена, определяющего массу в уравнении Дирака.

Варьируя Ω_0, получим из (14):

$$\delta\Omega_0 = \frac{1}{2}\delta H^{ik}\Phi_{ik} + \frac{1}{2}H^{ik}\delta\Phi_{ik} - \delta s^i \cdot \varphi_i - s^i \cdot \delta\varphi_i. \tag{17}$$

Пользуясь Φ_{kl} и φ_k и (15), найдем:

$$\delta\Phi_{kl} = i\,(\delta\bar{\psi})\,\alpha_k\alpha_l^{+}\alpha_0\psi, \quad \delta\varphi_i = (\delta\bar{\psi})\,\alpha_i\psi \tag{18}$$

и

$$\delta H^{ik} = \delta\left(\frac{\Phi_{ik}}{\sqrt{\cdot\cdot}}\right) = \frac{\delta\Phi_{ik}\sqrt{\ } - \Phi_{ik}\delta\sqrt{\ }}{(\sqrt{\cdot\cdot})^2}. \tag{19}$$

Но

$$\delta\sqrt{\cdot\cdot} = (\delta\bar{\psi})\,\alpha_0\psi \tag{20}$$

и

$$\delta H^{ik}\cdot\Phi_{ik} = H^{ik}\,i\,(\delta\bar{\psi})\,\alpha_i\alpha_k^{+}\alpha_0\psi - H^{ik}H_{ik}\,(\delta\bar{\psi})\,\alpha_0\psi. \tag{21}$$

Далее,

$$\delta s^i = \delta\left(-\frac{\varphi_i}{\sqrt{\cdot\cdot}}\right) = -\frac{\delta\varphi_i\cdot(\sqrt{\cdot\cdot}) - \varphi_i\,\delta(\sqrt{\ })}{(\sqrt{\cdot\cdot})^2}, \tag{22}$$

$$-\varphi_i\delta s^i = +(\delta\bar{\psi})\,\alpha_i\psi s^i - s^i s_i\,(\delta\bar{\psi})\,\alpha_0\psi. \tag{23}$$

Таким образом

$$\delta\Omega_0 = \Big\{\frac{1}{2}H^{ik}\,i\alpha_i\alpha_k^{+}\alpha_0\psi - \frac{1}{2}H^{ik}H_{ik}\alpha_0\psi + \frac{1}{2}H^{ik}\,i\alpha_i\alpha_k^{+}\alpha_0\psi + \\ + s^i\alpha_i\psi - s^i s_i\alpha_0\psi - s^i\alpha_i\psi\Big\}\,\delta\bar{\psi}. \tag{24}$$

В результате мы получаем следующее выражение для последнего члена в уравнении электрона:

$$\frac{mc}{h}\left(H^{ik}\,i\alpha_i\alpha_k^{+}\alpha_0\psi - \left(\frac{1}{2}H^{ik}H_{ik} + s^i s_i\right)\alpha_0\psi\right). \tag{25}$$

Мы видим, что этот член описывает реакцию собственного поля механических волн на частицу, причем состоит из двух существенно различной природы членов. Первый весьма подобен спин-члену, имеющемуся в уравнении 2-го порядка, с тем отличием, что вместо внешнего электромагнитного поля в нем стоит поле материальных волн H^{ik}. Второй член дает как бы лагранжиан этого поля.

Оба члена, будучи нелинейными в ψ и релятивистски инвариантными, компенсируют друг друга так, что в целом получается линейное в ψ уравнение.

Заметим в заключение, что, пользуясь этим методом преобразования массового члена в уравнении Дирака, легко модифицировать последнее разумным образом, скажем, вычеркивая те или иные члены, с тем, чтобы превратить его в искомое нелинейное уравнение для механических волн.

Физический институт им. П. Н. Лебедева;
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
17 I 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Schott, Electromagnetic Radiation, Cambridge (1912). [2] G. Mie, Ann. d. Physik, **37**, 511 (1912), **39**, 140 (1912); M. Born, Gött. Nachr., Math.-phys. Kl., 23 (1914); W. Pauli, Relativitätstheorie, 754. [3] H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, 5 Aufl., 210 (1923). [4] M. Born и L. Infeld, Proc. Roy. Soc. (A), **143**, 410 (1934); **144**, 425 (1934); P. Weiss, Proc. Roy Soc. (A), **156**, 207 (1936). [5] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., (A), **126**, 360 (1930); Proc. Cambr. Phil. Soc., **26**, 361 (1930); Proc. Roy. Soc. (A), **133**, 61 (1931). [6] H. Weyl, Proc. Nat. Acad. Amer., **15**, 323 (1929); ZS. f. Phys., **56**, 330 (1929). [7] E. Schrödinger, Sitz. Preuss. Ak. d. Wiss., 105 (1932). [8] D. Iwanenko, V. Ambarzumian, ДАН, 45 (1930). [9] V. Fock, ZS. f. Phys., **57**, 127 (1929). [10] К. В. Никольский, ДАН, 210 (1935). [11] H. Tetrode, ZS. f. Phys., **50**, 336 (1928). [12] L. de Broglie, L'électron magnétique, Hermann, Paris, 224 (1934). [13] K. Nikolsky, C. R., Paris, **200**, № 13 (1935). [14] R. Zaycoff, Ann. d. Phys., **5**, 9 (1931). [15] К. В. Никольский, ДАН, 667 (1930).