Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 8

*МЕХАНИКА*

В. В. ДОБРОНРАВОВ

# ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ НА СЛУЧАЙ КВАЗИ-КООРДИНАТ

*(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 19 I 1939)*

В данной работе дается обобщение теоремы Гамильтона-Якоби в том случае, когда для составления уравнений движения механической системы вводятся так называемые квази-координаты по методу Boltzmann'a-Hamel'я. Тем самым получается возможность непосредственного применения теоремы Гамильтона-Якоби к неголономным системам.

Вопрос о применении теоремы Гамильтона-Якоби к неголономным системам исследовался С. А. Чаплыгиным (1) и Quanjel'ем (2). Оба автора применяли иные сравнительно с предлагаемыми нами методы, и полученные ими результаты формулируются иначе, чем в данной работе. С. А. Чаплыгин рассматривал приведение к каноническому виду предложенных им уравнений, причем необходимым условием такого приведения являлось предварительное нахождение так называемого «приводящего множителя».

Quanjel исходил из уравнений Appell'я вида $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + R_i$, где $R_i$ представляет собой довольно сложное выражение, в которое входят альтернированные производные от коэффициентов связей.

При этом для применения теоремы Гамильтона-Якоби необходимо оказывалось, чтобы все $R^i$ удовлетворяли условию $R_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$, где $\varphi$ — некоторая функция от $q_i$. Последнее же условие, вообще говоря, далеко не всегда выполняется. Соответствующего примера Quanjel не привел.

§ 1. Boltzmann в 1902 г. (3) и независимо от него Hamel в 1904 г. предложили уравнения движения механических систем, имеющие место как в случае голономных связей, так и неголономных.

Вывод уравнений Boltzmann'a-Hamel'я производится путем введения особых функций, названных в дальнейшем в механике «квази-координатами» (4), а именно: имея обобщенные координаты системы $q_1, q_2, \ldots q_k$, составляем линейные формы от производных

$$\omega_\rho = \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\rho} \, q'_\mu, \tag{1}$$

где $\alpha_{\rho\mu}$—функции $q_i$, и детерминант $|\alpha_{\rho\mu}| \neq 0$.

Тогда

$$q'_\mu = \sum_{\lambda=1}^{k} \beta_{\lambda\mu} \omega_\lambda. \tag{2}$$

Можно ввести условное обозначение

$$\omega_\rho = \frac{d\pi_\rho}{dt}, \tag{3}$$

причем в зависимости от интегрируемости форм (1) те или иные $\pi_\rho$ будут или истинными новыми координатами системы, или же будут «квази-координатами» (не существующими).

Тогда уравнения Boltzmann'a-Hamel'я пишутся следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_\lambda} + \sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{k} \gamma_{\lambda sr}\frac{\partial T}{\partial \omega_s}\omega_r - \left(\frac{\partial T}{\partial \pi_\lambda}\right) = \Pi_\lambda^{(*)}, \quad (\lambda = 1,2\ldots k) \tag{4}$$

где через $\left(\frac{\partial T}{\partial \pi_\lambda}\right)$ символически обозначено выражение $\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_\mu}\beta_{\lambda\mu}$ и $\Pi_\lambda = \sum_{\mu=1}^{k}\beta_{\lambda\mu} Q_\mu$ — обобщенные силы.

Функции же $\gamma_{\lambda,s,r}$ представляют собой особые коэффициенты Hamel'я. В случае неголономных и реономных, вообще говоря связей вида $q'_{e+m} = \sum_{h=1}^{e}\alpha_{mh}q'_h + \alpha_m$ $(m = 1, 2, \ldots g;\ e+g=k)$ можно ввести квази-координаты $\omega_\rho$ следующим образом:

$$\omega_\nu = q'_\nu; \quad \delta\pi_\nu = \delta q_\nu\ (\nu = 1, 2, \ldots e),$$

$$q_{e+1} = t; \quad \omega_{e+1} = q'_{e+1} = 1; \quad \delta^{\pi}_{e+1} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_{e+m+1} &= q'_{e+m+1} - \sum_{h=1}^{e}\alpha_{mh}q'_h - \alpha_m \\ \delta\pi_{e+m+1} &= \delta q_{e+m+1} - \sum_{h=1}^{e}\alpha_{mh}\delta q_h \end{aligned}\right\} m = 1, 2, \ldots g.$$

Тогда уравнения (4), принимая во внимание условия связей $\omega_{e+m+1} = 0$, примут следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_h} + \sum_{s=1}^{e+1}\sum_{m=1}^{g}\gamma_{h,e+m+1,s}\frac{\partial T}{\partial \omega_{e+m+1}}\omega_s - \left(\frac{\partial T}{\partial \pi_h}\right) = \Pi_h \ (h = 1, 2, \ldots e), \tag{5}$$

Уравнения (5) вместе с уравнениями связей и дадут систему уравнений для определения в функции времени величин $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

§ 2. Покажем теперь, что теорема Гамильтона-Якоби может быть обобщена и на случай квази-координат, т. е., что уравнения (4) и (5) могут быть приведены к каноническому виду, и что можно для них построить уравнение с частными производными, зная полный интеграл которого возможно получить решение системы (4) или (5).

Для приведения уравнений (4) к каноническому виду введем новые переменные $p_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega_\lambda}$. Далее полагаем $K = \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu\omega_\mu - T$.

Варьируя функцию $K$ один раз, как функцию $p_\mu$, $\omega_\mu$ и $q_\mu$, а другой раз, как функцию $p_\mu$ и $q_\mu$, получим сначала такие соотношения:

$$\omega_\mu = \frac{\partial K}{\partial p_\mu}, \ \left(\frac{\partial K}{\partial \pi_\mu}\right) = -\left(\frac{\partial T}{\partial \pi_\mu}\right), \tag{6}$$

---

* Для частного случая $\gamma_{\lambda sr}$ = const и только для голономных систем эти уравнения были еще раньше в 1901 г. получены H. Poincaré, который, оперируя аппаратом групп S. Lie, фактически употреблял тот же метод «квази-координат» (5).

причем вообще

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \pi_\mu}\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial q_i} \beta_{\mu i}.$$

Уравнения (4) перепишутся после этого следующим образом:

$$\frac{dp_\lambda}{dt} + \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{k} \gamma_{\lambda sr} \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \frac{\partial K}{\partial p_r} = -\left[\frac{\partial (K-U)}{\partial \pi_\lambda}\right], \tag{7}$$

полагая $\Pi_\lambda = \left(\frac{\partial U}{\partial \pi_\lambda}\right)$.

Вводим теперь еще функцию $H$:

$H = K - U = \sum_{\lambda=1}^{k} p_\lambda \omega_\lambda - T - U$. В случае однородности $T$ относительно $\omega_\lambda$, $H = T - U$. Тогда уравнения (7) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \omega_\lambda &= \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \\ \frac{dp_\lambda}{dt} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial \pi_\lambda}\right) - \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{k} \gamma_{\lambda sr} p_s \frac{\partial H}{\partial p_r} \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Это и будут канонические уравнения в квази-координатах.

§ 3. Введем далее оператор $\beta_i(v)$:

$$\beta_i(v) = \beta_{i1} \frac{\partial v}{\partial q_1} + \beta_{i2} \frac{\partial v}{\partial q_2} + \ldots \beta_{ik} \frac{\partial v}{\partial q_k}, \tag{9}$$

где $\beta_{ij}$—коэффициенты в равенствах (2).

Можно доказать теперь следующее предложение. Зная полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H[\beta_i(v), q_i, t] = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots k), \tag{10}$$

т. е. имея функцию $v(q_i, a_i, t)$, где $a_i = \text{const}$, удовлетворяющую уравнению (10), мы получим общее решение канонических уравнений в квази-координатах, т. е. уравнений (8), полагая

$$\frac{\partial v}{\partial a_i} = b_i, \quad p_i = \beta_i(v), \quad (b_i = \text{const}). \tag{11}$$

Доказательство проводится следующим образом*: дифференцируем по времени каждое из равенств (11), выражаем потом каждое $q_i'$ через $\omega_\lambda$ и через $\frac{\partial H}{\partial p_\lambda}$ из уравнений (8), а каждое $\frac{dp_i}{dt}$ тоже заменяем его выражением из (8); далее показываем, что полученные таким образом после дифференцирования (11) равенства представляют собою тождества. Для этой цели подставляем известный полный интеграл в уравнение (10) и с полученным тождеством проделываем следующие операции: сначала дифференцируем по $a_i$ и получаем тождество, совпадающее с равенством, полученным после дифференцирования первого из уравнений (11) и являющимся следовательно тоже тождеством; затем берем от тождества (10) операцию $\beta_i$ и показываем, что полученное при этом тождество совпадает с равенством, получаемым при дифференцировании по $t$ второго из уравнений (11). Отсюда и вытекает, что величины $q_i$ и $p_i$, определяемые равенствами (11), удовлетворяют каноническим ур-иям (8).

---

* Полностью доказательство приводится в нашей работе по этому вопросу, имеющей быть напечатанной в «Трудах Моск. гидро-метеорол. института», вып. 2. Для упомянутого частного случая Poincaré аналогичное предложение дано Н. Четаевым (7) (без доказательства).

При этом мы пользуемся следующим важным свойством коэффициентов Hamel'я, т. е. функций $\gamma_{\lambda, s, r}$, а именно: скобка Пуассона от каждой пары операторов $\beta_i$ представляет собой линейную форму от всех этих операторов, причем коэффициенты этой линейной формы как раз и будут коэффициенты Hamel'я, т. е.

$$(\beta_i, \beta_\mu) = \beta_i(\beta_\mu) - \beta_\mu(\beta_i) = \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_{i\nu\mu}\beta_\nu. \tag{12}$$

Это свойство в случае, когда все $\gamma_{i\nu\mu} = \mathrm{const}$, известно из теории групп S. Lie.

В случае же, когда $\gamma_{i,\nu,\mu}$ будут зависеть от $q_i$, равенство (12) доказывается при помощи равенства Schur'a (6):

$$\sum_{\lambda=1}^{k}\left(\beta_{\rho\lambda}\frac{\partial\beta_{\sigma\nu}}{\partial q_\lambda} - \beta_{\sigma\lambda}\frac{\partial\beta_{\rho\nu}}{\partial q_\lambda}\right) = \sum_{\tau=1}^{n}\gamma_{\rho\tau\sigma}\beta_{\tau\nu} \tag{13}$$

или же путем непосредственной проверки с помощью выражений коэффициентов Hamel'я

$$\gamma_{\lambda sr} = \sum_{\mu=1}^{k}\sum_{e=1}^{k}\beta_{\lambda\mu}\beta_{re}\left(\frac{\partial\alpha_{s\mu}}{\partial q_e} - \frac{\partial\alpha_{se}}{\partial q_\mu}\right),$$

а также условий

$$\sum \alpha_{\rho\mu}\beta_{\gamma\mu} = \begin{Bmatrix}1 \\ 0\end{Bmatrix} \text{ при } \begin{matrix}\rho = \lambda \\ \rho \neq \lambda\end{matrix}\Bigg\}.$$

§ 4. Поскольку уравнения Boltzmann'a-Hamel'я, написанные в форме (5), имеют место и для систем с неголономными линейными связями, то и предлагаемое обобщение теоремы Гамильтона-Якоби должно быть приложимо для неголономных систем. В этом случае из уравнений (11) надо взять все равенства первой группы, т. е. $\frac{\partial v}{\partial a_i} = b_i$, а из уравнений второй группы необходимо взять только те равенства, которые соответствуют индексам голономных координат, т. е. $p_\nu = \beta_\nu(v)$ $(\nu = 1, 2, \ldots e)$. Для определения же всех $2k$ произвольных постоянных $a_i$, $b_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ мы добавим $g$ неголономных условий, подставив в них производные от $q_i$, найденные из уравнений $\frac{\partial v}{\partial a_i} = b_i$, и воспользовавшись, разумеется, начальными данными; таким образом, добавив уравнения связей, мы и получим систему уравнений для нахождения всех координат $q_i$ $(i = 1, 2, \ldots k)$ и всех $a_i$, $b_i$.

Вычисления, проделанные для простейшей неголономной системы — для острорежущего с двумя степенями свободы колеса, плоскость которого остается всегда перпендикулярной к плоскости движения (пример С. А. Чаплыгина),—подтверждают данные выводы.

Гидро-метеорологический институт.
Москва.

Поступило
30 XII 1938.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе, Собр. соч., т. 1, изд. Акад. Наук СССР. [2] Quanjel, Sur les équations du mouvement de systèmes non holonomes. Palermo. Rend., 22 (1906). [3] L. Boltzmann, Sitzungsberichte der Wiener Acad., **111** (1902). [4] G. Hamel, Math. Annalen, **59**. [5] H. Poincaré, C. R., **132** (1901). [6] Schur, Math. Annalen, **33** (1888). [7] Н. Четаев, C. R., **185** (1927).