Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 3

МАТЕМАТИКА

П. Е. ДЮБЮК

О НОРМАЛИЗАТОРЕ ЭЛЕМЕНТА В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 14 XII 1938)

В настоящей работе доказывается ряд теорем о нормализаторе элемента в конечной группе. При этом используется аппарат теории квазинормализаторов, построенной В. К. Туркиным (1), и применяются также некоторые новые методы. В дальнейшем применение теорем о нормализаторе позволяет сформулировать новый критерий непростоты конечной группы. Приведем прежде всего следующее общего характера предложение, заключающее в себе, как частные случаи и следствия, многие дальнейшие результаты.

Теорема 1. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент $(k-i-1)$-го квазинормализатора $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$ элемента A^{p^i}, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} не делится на p^2.*

Отметим некоторые основные моменты доказательства теоремы. Будем при этом употреблять символ λ_i в том смысле, в котором он определен в работе В. К. Туркина «Квазинормализаторы и мономиальные представления» (2). Для случая $\lambda_i \neq k-i$ доказательство основывается на следующем вспомогательном предложении.

Лемма. *Если имеют место условия теоремы 1 и сверх того $\lambda_i \neq k-i$, то отношение порядков квазинормализаторов $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(\lambda_i)}$ и $\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(\lambda_i)}$ сравнимо с единицей по модулю p^{i+1}.*

Доказательство приведенной леммы довольно сложно и основывается на инвариантности одного выражения, часто встречающегося в теории мономиальных представлений групп.

Для случая $\lambda_i \neq k-i$ теорема 1 непосредственно следует из приведенной леммы. Дело в том, что по основному свойству квазинормализаторов отношение порядков групп $\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(\lambda_i)}$ и $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(\lambda_i)}$ равно отношению порядков групп $\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(k-i-1)}$ и $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$. Это последнее отношение не делится следовательно на p. В то же время нормализатор $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)}$ элемента A^{p^i} есть подгруппа индекса p группы $\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i-1)}$.

В случае $\lambda_i = k-i$ рассматривается разложение

$$\mathfrak{N}_{A^{p^{i+1}}}^{(k-i-1)} = \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} + \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} N_2'' + \ldots + \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} N_f'' \tag{1}$$

и показывается, что все смежные системы

$$\mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} N_r'', \quad \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} N_r'' A, \; \ldots \; \mathfrak{N}_{A^{p^i}}^{(k-i)} N_r'' A^{p^{i+1}-1} \tag{2}$$

(где N_r'' — произвольный вычет разложения (1), не равный единице) различны. Все смежные системы разложения (1) за исключением системы $\mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}}$ можно сгруппировать в совокупности, аналогичные совокупности (2). Отсюда вытекает, что для данного случая ($\lambda_i = k - i$) отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} сравнимо с единицей по модулю p^{i+1}.

Непосредственными следствиями теоремы 1 являются результаты:

Теорема 2. *Пусть A—элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{i+1}}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} не делится на p^2.*

Теорема 3. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент нормализатора циклической группы $\{A^{p^i}\}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A^{p^i} не делится на p^2.*

Применяя последовательно надлежащее число раз теоремы 1, 2 или 3, можно получить далее такие результаты.

Теорема 4. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент $(k-i-1)$-го квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^i}}$ элемента A^{p^i}, сопряженный с элементом A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A не делится на p^{i+2}.*

Теорема 5. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{i+1}}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A не делится на p^{i+2}.*

Теорема 6. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Если каждый элемент нормализатора циклической группы $\{A^{p^i}\}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A не делится на p^{i+2}.*

Если нормализатор элемента A^{p^i} совпадает с нормализатором элемента A, то можно несколько усилить теорему 2, доказав следующее предложение.

Теорема 7. *Пусть A — элемент порядка p^k (p — нечетное простое число) некоторой группы $\mathfrak{G}$. Если нормализатор элемента A^{p^i} ($i \neq 0$) совпадает с нормализатором элемента A, и каждый элемент этого нормализатора, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{p^{i+1}}$ и A сравнимо с единицей по модулю p^{i+1}.*

При доказательстве этой теоремы отмечается: 1) что из условий теоремы немедленно следует: $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^{i-1}}} = \mathfrak{N}^{(2)}_{A^{p^{i-1}}} = \ldots = \mathfrak{N}^{(k-i+1)}_{A^{p^{i-1}}}$, 2) что далее, применяя методы подсчета, уже использованные при доказательстве теоремы 1, можно притти также к равенству: $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^i}} = \mathfrak{N}^{(2)}_{A^{p^i}} = \ldots$ $\ldots \mathfrak{N}^{(k-i)}_{A^{p^i}}$, т. е. $\lambda_i = k - i$. Далее остается повторить доказательство теоремы 1 для случая $\lambda_i = k - i$.

Теоремы 1—7 будут справедливы также и для случая $p=2$, если ввести дополнительное условие, что элемент четвертого порядка $A^{p^{k-2}}$ не будет сопряжен со своим обратным элементом [см. по этому поводу работу автора «О порядке элемента в простой группе» ([3])], например для случая $p=2$ теорема 1 видоизменяется следующим образом:

Теорема 8. *Пусть A — элемент порядка 2^k группы $\mathfrak{G}$. Если каждый элемент $(k-i-1)$-го квазинормализатора $\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{2^i}}$ элемента A^{2^i}, сопряженный со степенью A, есть снова степень A, и элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{2^{i+1}}$ и A^{2^i} не делится на 4.* Аналогичным образом видоизменяются для случая $p=2$ и теоремы 2—7.

Отметим особо только одно видоизменение частного случая теоремы 4 $(i=k-2)$ для $p=2$:

Теорема 9. *Пусть A — элемент порядка 2^k группы $\mathfrak{G}$. Если каждый элемент нормализатора элемента $A^{2^{k-2}}$, сопряженный со степенью A, есть снова степень A и элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом, то отношение порядков нормализаторов элементов $A^{2^{k-1}}$ и A не делится на 2^{k-1}.*

Приведенные теоремы позволяют обосновать такой критерий непростоты группы:

Теорема 10. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Пусть каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m\equiv 1 \pmod p$. Если нормализатор элемента A — абелева группа, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель.*

Порядок этого нормального делителя кратен n, если через $p^\beta n$ обозначен порядок группы $\mathfrak{G}$ (и взаимно прост с p).

Для доказательства теоремы 10 достаточно применить теорему 5 и использовать следующий критерий непростоты, выведенный в работе В. К. Туркина и П. Е. Дюбюка «О строении простых групп» ([4]).

Пусть $\mathfrak{P}$—абелева подгруппа порядка p^α некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\beta n$ (p — нечетное простое число, n не делится на p). Пусть A — элемент подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка p^k, причем всякий элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m\equiv 1 \pmod p$. Если порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ не делится на $p^{\alpha+k}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.

В формулировке теоремы 10 нормализатор элемента $A^{p^{k-1}}$ можно заменить нормализатором циклической группы $\{A^{p^{k-2}}\}$ или первым квазинормализатором элемента $A^{p^{k-2}}$. С другой стороны, требование коммутативности нормализатора элемента A в условии теоремы 10 можно заменить более слабым требованием коммутативности силовской p-подгруппы нормализатора элемента A.

Отметим один частный случай теоремы 10:

Теорема 11. *Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^\beta n$ [p — простое нечетное число, n — взаимно просто с $p(p-1)$]. Пусть каждый элемент нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$, сопряженный со степенью A, есть снова степень A. Если нормализатор элемента A — абелева группа, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.*

Для случая $p=2$ можно получить такой результат:

Теорема 12. *Пусть A — элемент порядка 2^k группы $\mathfrak{G}$ порядка $2^\beta n$ (n — нечетное число). Пусть каждый элемент нормализатора элемента $A^{2^{k-2}}$, сопряженный со степенью A, есть снова степень A и элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом.*

Если нормализатор элемента A — абелева группа, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, кратного n.

Для доказательства теоремы 12 достаточно воспользоваться теоремой 9 и применить следующий критерий непростоты группы, выведенный в цитированной работе (4). Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева подгруппа порядка 2^α некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $2^\beta n$ (n — нечетное число). Пусть A — элемент подгруппы $\mathfrak{P}$ порядка 2^k, причем всякий элемент группы $\mathfrak{P}$, сопряженный со степенью A, будет снова степенью A. Если элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен со своим обратным элементом и порядок нормализатора элемента $A^{2^{k-1}}$ не делится на $2^{k+\alpha}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, кратного n. Как и в теореме 10, требование коммутативности нормализатора элемента A в теореме 12 можно заменить более слабым требованием коммутативности той силовской подгруппы этого нормализатора, порядок которой есть степень 2.

Заметим, что для случая $k=1$ в условии теоремы 12 нормализатор элемента $A^{2^{k-2}}$ надо заменить нормализатором элемента $A^{2^{k-1}}$. Требование о несопряженности элемента $A^{2^{k-2}}$ со своим обратным элементом в этом случае ($k=1$) должно быть просто снято, как это вытекает из замечаний, приведенных в цитированной работе (4).

Применяя теорему 10 к специальному случаю $k=1$ и учитывая замечания, только что сделанные по поводу теоремы 12, приходим к такому результату:

Теорема 13. *Пусть A — элемент порядка p группы $\mathfrak{G}$ (p — простое число). Если силовская p-подгруппа нормализатора элемента A — абелева, и ни один элемент ее не сопряжен с A, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. Порядок этого нормального делителя кратен n, если через $p^\beta n$ обозначен порядок группы $\mathfrak{G}$ (n не делится на p).*

Для доказательства теоремы 13 достаточно отметить, что при нечетном p она представляет собой частный случай теоремы 10. В самом деле, если элемент A не сопряжен ни с одним элементом некоторой силовской p-подгруппы своего нормализатора, то он не может быть сопряжен вообще ни с одним элементом своего нормализатора.

Справедливость теоремы для $p=2$ вытекает из теоремы 12 и тех замечаний, которые были сделаны по поводу этой теоремы.

Теорема 13 является обобщением, поскольку речь идет о существовании нормального делителя, а не о порядке его, известного предложения Бернсайда (5).

Заметим в заключение, что теорема 13 может быть также получена, как непосредственное следствие теорем, доказанных в работе (4).

Институт математики
Московского государственного университета.

Поступило
16 XII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. К. Туркин, Мат. сборник, **2(44)**, 5 (1937). [2] В. К. Туркин, Изв. Акад. Наук, сер. мат., **4** (1938). [3] П. Е. Дюбюк, Изв. Акад. Наук, сер. мат., 5—6 (1938). [4] В. К. Туркин и П. Е. Дюбюк, ДАН, XX, № 7—8 (1938). [5] W. Burnside, Theorie of Groups of Finite Order, p. 327; О. Ю. Шмидт, Абстрактная теория групп, 168 (1933).