**Доклады Академии Наук СССР**
**1939. Том XXII, № 8**

*МАТЕМАТИКА*

**Я. С. ДУБНОВ и М. А. САБИРОВ**

# К ТЕОРИИ ШАРОВЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

*(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 21 I 1939)*

1. Сеть Менье, ассоциированная с конгруэнцией. Рассмотрим поверхность, заданную двумя гауссовыми тензорами

$$G_{ij} = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j, \quad B_{ij} = -\mathbf{R}_i \mathbf{N}_j, \tag{1}$$

где $\mathbf{R}(u^1, u^2)$ — радиус-вектор точки на поверхности, $\mathbf{N}(u^1, u^2)$ — единичный вектор нормали, $\mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u^i}$. Совокупность кривых, лежащих на поверхности и имеющих в каждой ее точке заданный радиус $\rho(u^1, u^2)$ нормальной кривизны, образует сеть

$$(G_{\alpha\beta} - \rho B_{\alpha\beta})\, du^\alpha du^\beta = 0, \tag{2}$$

симметричную относительно линий кривизны. Вместе с тем определяется конгруэнция шаров (ориентированных) радиуса $\rho(u^1, u^2)$, для которой $\mathbf{R}$ является одной из полостей огибающей, а каждый шар служит «шаром Менье» для двух кривых (2), проходящих через точку касания. Обратно, всякой конгруэнции шаров, касающихся поверхности $\mathbf{R}$, соответствует сеть (2), которую уместно назвать «сетью Менье, ассоциированной с данной конгруэнцией». Эта сеть не вырождается, если $\rho$ не совпадает ни с одним из радиусов главных кривизн поверхности $\mathbf{R}$, т. е. если

$$1 - 2\rho H + \rho^2 K \neq 0 \tag{3}$$

($K$ и $H$ — соответственно гауссова и средняя кривизна поверхности $\mathbf{R}$), что мы и будем предполагать в дальнейшем; при условии (3) вторая полость $\overset{\times}{\mathbf{R}}(u^1, u^2)$ огибающей отлична от первой $\mathbf{R}$. Отметим три частных случая: смотря по тому, является ли радиус $\rho$ шара по отношению к радиусам главных кривизн поверхности $\mathbf{R}$ 1) средне-арифметическим $\left[\rho = \frac{H}{K}\right.$ — Mittenkugel у Blaschke(1)$\left.\right]$, 2) средне-гармоническим $\left[\rho = \frac{1}{H}\right.$ — Zentralkugel, там же$\left.\right]$ или 3) средне-пропорциональным $\left[\rho = \sqrt{\frac{1}{K}}\right]$, будем говорить соответственно о конгруэнции шаров: 1) средне-арифметических, 2) средне-гармонических, 3) средне-пропорциональных относительно поверхности $\mathbf{R}$. Ассоциированные сети Менье суть соответственно: 1) $(KG_{\alpha\beta} - HB_{\alpha\beta})\, du^\alpha du^\beta = 0$, так называемая «характеристическая сеть», т. е. сопряженная сеть, гармоническая с сетью линий кривизны; 2) $(HG_{\alpha\beta}-B_{\alpha\beta})\,du^\alpha du^\beta=0$, состоящая из биссекторных линий сети линий кривизны; 3) $(\sqrt{K}\,G_{\alpha\beta}-B_{\alpha\beta})\,du^\alpha du^\beta=0$.

2. Шаровая конгруэнция Рибокура характеризуется тем, что линиям кривизны на полости $\mathbf{R}$ огибающей соответствует сопряженная сеть на поверхности $\mathbf{r}$, образованной центрами шаров, или (что то же в случае, когда вторая полость $\overset{\times}{\mathbf{R}}$ огибающей не вырождается) полости $\mathbf{R}$ и $\overset{\times}{\mathbf{R}}$ соответствуют друг другу линиями кривизны. Зная тензоры (1) полости $\mathbf{R}$ и радиус $\rho$ шара, можно найти с точностью до множителя второй гауссов тензор $b_{ij}$ поверхности центров $\mathbf{r}$:

$$b_{ij} :: (1-2\rho H+\rho^2K)\,[\nabla_j\rho_i+\rho KG_{ij}-(2\rho H-1)\,B_{ij}]+ \\ +\rho_\omega\,[\rho B_\alpha^\omega-(2\rho H-1)\,\delta_\alpha^\omega]\,(\rho\nabla_j B_i^\alpha+\rho_i B_j^\alpha+\rho_j B_i^\alpha), \tag{4}$$

где :: знак пропорциональности, $\nabla$ — символ ковариантного дифференцирования, производимого относительно метрического тензора $G_{ij}$, наконец $B_i^k=G^{k\alpha}B_{i\alpha}$. Отправляясь от (4), приходим к следующему условию, характеризующему конгруэнцию Рибокура:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_i\equiv\frac{(B_i^\alpha-\rho K\,\delta_i^\alpha)\,\rho_\alpha}{1-2\rho H+\rho^2K}=\mathrm{grad} \\ &\text{или} \\ &E^{\lambda\mu}\,\nabla_\lambda\frac{(B_\mu^\alpha-\rho K\,\delta_\mu^\alpha)\,\rho_\alpha}{1-2\rho H+\rho^2K}=0,\ \ (E^{11}=E^{22}=0,\ E^{12}=-E^{21}) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом разыскание всех «преобразований Рибокура» для поверхности, заданной в общих координатах тензорами (1), сводится к решению дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка относительно одной неизвестной функции $\rho$. Заметим, что компоненты тензора $\xi_i$, участвующего в (5), приобретают простой вид в параметрах линий кривизны поверхности $\mathbf{R}$:

$$\xi_1=\frac{\rho_1}{\rho'-\rho},\qquad \xi_2=\frac{\rho_2}{\rho''-\rho},$$

где $\rho'$, $\rho''$ — радиусы главных кривизн этой поверхности. Возвращаясь к общему случаю, найдем «чебышевский тензор» $\tau_i$ (²) сети (2), ассоциированной с конгруэнцией:

$$2\tau_i=\frac{H\rho_i-\rho H_i-B_i^\alpha\rho_\alpha+\frac{1}{2}\rho^2K_i}{1-2\rho H+\rho^2K}.$$

Исключая $B_i^\alpha\rho_\alpha$ отсюда и из выражения (5) для тензора $\xi_i$, найдем:

$$4\tau_i+2\xi_i=\frac{4\,(H-\rho K)\,\rho_i}{1-2\rho H+\rho^2K}+[\ln(1-2\rho H+\rho^2K)]_i. \tag{6}$$

Остановимся на случае, когда правая часть есть градиент или, что то же, когда дробь $\frac{H-\rho K}{1-\rho H}$ $\left(\text{или } \frac{1-\rho H}{H-\rho K}\right)$ есть функция $\rho$; заметим, что последнее требование выполняется для каждой из трех конгруэнций, упомянутых в конце п. 1. Из (6) следует, что в рассматриваемом случае два свойства: 1) $\xi_i = \mathrm{grad}$, т. е. шаровая конгруэнция принадлежит к классу Рибокура, 2) $\tau_i = \mathrm{grad}$, т. е. ассоциированная сеть Менье есть «коддациева» *, обусловливают друг друга. Из вытекающих отсюда геометрических фактов отметим следующий: для того, чтобы характеристическая сеть имела равные точечные инварианты Лапласа-Дарбу, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция средне-арифметических шаров была рибокуровой.

3. Три расширения класса конгруэнций Рибокура получаются, если ослабить требование, содержащееся в определении этого класса. Именно, в соответствии с тремя известными свойствами линий кривизны заменим прежнее требование (п. 2) одним из следующих: чтобы линиям кривизны на одной из полостей $\mathbf{R}$ огибающей соответствовала на другой полости $\overset{\times}{\mathbf{R}}$ сеть: 1) ортогональная, 2) сопряженная, 3) имеющая сферическим отображением ортогональную сеть. Каждое из этих требований приводит к конгруэнции Рибокура, дополненной (если отвлечься от особых случаев, когда полость $\mathbf{R}$ представляет собою развертывающуюся поверхность, или минимальную, или сферу) соответственно конгруэнциями: 1) средне-гармонических, 2) средне-пропорциональных, 3) средне-арифметических шаров полости $\mathbf{R}$.

Институт математики
Московского университета.

Поступило
4 VII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, III (1929). [2] J. Doubnoff, C. R. Ac. Sci. Paris, 192, 261—264 et 1604 (1931).

* В статье (2) так названа сеть, уравнение которой может быть представлено в виде $\varphi_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta = 0$ с симметрическим тензором $\nabla_k \varphi_{ij}$. Изотермическая сеть-коддациева-ортогональная; сеть равных точечных инвариантов Лапласа-Дарбу-коддациева-сопряженная.