Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 8

МАТЕМАТИКА

В. ШМУЛЬЯН

ЛИНЕЙНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ СВЯЗЬ С ПРОСТРАНСТВАМИ ТИПА (B)

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 I 1939)

1. Пусть E_T обозначает линейное топологическое пространство, т. е. линейное пространство, которое является топологическим и в котором операции сложения элементов и умножения на число непрерывны. Это определение принадлежит А. Колмогорову (1). Несколько иное определение линейного топологического пространства было дано J. Neumann'ом (2). Это определение J. Neumann'а основано на рассмотрении окрестностей, которые подчиняются 6 аксиомам. J. Neumann показал, что рассматриваемое им линейное топологическое пространство является линейным топологическим пространством по А. Колмогорову. Wehausen (3) показал, что, наоборот, каждое линейное топологическое пространство по А. Колмогорову удовлетворяет всем 6 аксиомам J. Neumann'а кроме второй. Однако, так как J. Neumann использует вторую аксиому только для доказательств теорем 16—20, то мы сможем воспользоваться основными предложениями J. Neumann'а для изучения линейных топологических пространств E_T А. Колмогорова.

Кроме того Wehausen заметил (3), что локально выпуклые линейные топологического пространства по А. Колмогорову совпадают с выпуклыми линейными топологическими пространствами J. Neumann'а без 2-й его аксиомы.

Теорема 1. *Компактное множество линейного топологического пространства тотально ограничено* (4).

Эта теорема, доказательство которой несложно, является обобщением одной теоремы D. H. Hyers'а (5).

Теорема 2. *Если S — компактное множество в локально выпуклом и топологически полном* (6) *линейном топологическом пространстве E_T, то наименьшее выпуклое множество, содержащее S, тоже компактно.*

Для доказательства этой теоремы достаточно применить предыдущую теорему, а также теоремы 14 и 11 из работы J. Neumann'а.

Определение 1. Множество $S \subset E_T$ назовем полным, если для каждой фундаментальной [в смысле G. Birkhoff'а (7)] последовательности $\{x_\alpha\} \subset S$, где α пробегает некоторое направленное множество, существует элемент $x_0 \in E_T$, для которого $x_\alpha \to x_0$ (7).

Теорема 3. *Замкнутое множество $S \subset E_T$ бикомпактно тогда и только тогда, когда оно тотально ограничено и полно.*

Доказательство. Если S бикомпактно, то полнота S легко следует из определения бикомпактности, а тотальная ограниченность S есть следствие теоремы 1. Для доказательства 2-й части теоремы следует воспользоваться леммой G. Birkhoff'a (стр. 49). Заметим, что теорема 3 содержит в себе, как частный случай, теорему 12 G. Birkhoff'a.

Определение 2. Пространство E_T назовем квази-полным, если каждое тотально ограниченное его множество полно.

Из этого определения ясно, что если E_T квази-полно, то E_T топологически полно. Следующая теорема показывает, в каком случае верно обратное.

Теорема 4. *Линейное топологическое пространство по J. Neumann'y является квази-полным, если оно топологически полно.*

Для доказательства следует воспользоваться теоремой 16 J. Neumann'a и предыдущей теоремой 3.

Теоремы 1 и 3 дают возможность легко установить следующую теорему о существовании инвариантной точки.

Теорема 5. *Если K—полное, выпуклое и замкнутое множество локально выпуклого линейного топологического пространства E_T и если $U(x)$ непрерывно отображает K в свою компактную часть, то имеется такая точка $x \in K$, что $U(x) = x$.*

Замечание: Если пространство квази-полно, то полноту K можно не требовать.

Для доказательства теоремы построим K_1 — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее $U(K)$. Так как K_1 бикомпактно и $U(K_1) \subset K_1$, то остается применить теорему А. Тихонова о существовании инвариантной точки ([8]).

II. Пусть E обозначает пространство типа (B)*. Следуя А. Тихонову, определим следующим образом слабую топологию в E:

Для любых $f_1, \ldots, f_n \in \overline{E}$, $\varepsilon > 0$ и n через $U(f_1, \ldots, f_n; \varepsilon)$ обозначим совокупность тех точек x, для которых $|f_i(x)| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$. Каждое множество $U(f_1, \ldots, f_n; \varepsilon)$ назовем окрестностью точки θ. Тогда мы получаем локально выпуклое топологическое пространство по А. Колмогорову, которое мы обозначим через E_T. Заметим, что если E сепарабельно, то в E_T выполняются все аксиомы J. Neumann'a.

Лемма. *Если K—выпуклое и замкнутое по норме множество в E, то оно остается таким же и в E_T.*

Теорема 6. *Для слабой компактности единичной сферы E необходимо и достаточно, чтобы E_T было топологически полно.*

Теорема 7. *Для слабой компактности единичной сферы E необходимо и достаточно, чтобы единичная сфера E была компактным и замкнутым множеством в E_T.*

Для доказательства этих двух теорем следует воспользоваться нашей леммой, теоремой 22 J. Neumann'a, а также следующей (сейчас печатающейся в «Математическом сборнике») теоремой автора:

Для слабой компактности единичной сферы необходимо и достаточно, чтобы каждая счетная ограниченная и убывающая последовательность

$$K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$$

выпуклых замкнутых множеств имела непустое пересечение.

Установим теперь аналогичный критерий для регулярности E. Для этого мы воспользуемся следующей теоремой ([10]):

---

* Мы будем придерживаться терминологии и обозначений S. Banach'a ([9]).

A. *Каждый* $F \subset \overline{\overline{E}}$ *можно представить в виде* $F(f) = \lim f(x_\alpha)$, *где* $|x_\alpha| \leqslant |F|$ *и* α *пробегает некоторое направленное множество.*

Следовательно регулярность пространства E эквивалентна следующему:

Если для некоторых $\{x_\alpha\}$ *существует* $\lim f(x_\alpha)$ *для всех* $f \in \overline{E}$, *где* $|x_\alpha| \leqslant 1$ *и* α *пробегает некоторое направленное множество, то существует такой элемент* $x_0 \in E$, *что* $\lim f(x_\alpha) = f(x_0)$ для $f \in \overline{E}$.

Заметим, что сформулированный тут критерий регулярности H. Goldstine'а можно выразить так:

Регулярность E эквивалентна квази-полноте E_T.

Действительно, для доказательства нам следует только применить теорему 22 из работы J. Neumann'а.

Если теперь воспользоваться теоремой 3, то получим след. теорему:

Теорема 8. *Для регулярности E необходимо и достаточно, чтобы единичная сфера E была бикомпактным множеством в* E_T.

III. Заметим, что теорема (A) H. Goldstine'а допускает дополнение:

Теорема 9. *Если единичная сфера E слабо компактна, то каждый* $F \in \overline{\overline{E}}$ *можно представить в виде* $F(f) = \lim f(x_\alpha)$, *где все* x_α *принадлежат некоторому выпуклому множеству, лежащему на поверхности сферы* $|x| = |F|$, *а* α *пробегает некоторое направленное множество.*

Таким образом регулярность E в этом случае означает, что если существует $\lim f(x_\alpha)$ *для всех* $f \in \overline{E}$, *где все* x_α *принадлежат некоторому выпуклому множеству, лежащему на поверхности сферы* $|x| = 1$, *а* α *пробегает некоторое направленное множество, то существует такой элемент* $x_0 \in E$, *что* $\lim f(x_\alpha) = f(x_0)$ *для* $f \in \overline{E}$.

Доказательство настоящей теоремы, как и доказательство теоремы (A) H. Goldstine'а, основано на представлении каждого $F \in \overline{\overline{E}}$ в виде $F(f) = \int\limits_Q f(x)\, d\Phi(e)$, где Q — единичная сфера E, а $\Phi(e)$ — аддитивная функция ограниченной вариации от множеств $e \in Q$.

Сопоставляя предыдущие теоремы, легко имеем:

Теорема 10. *Для регулярности E необходимо и достаточно, чтобы* E_T *было топологически полным и чтобы каждое выпуклое замкнутое (по норме) множество, лежащее на поверхности единичной сферы, было бикомпактным множеством в* E_T.

Во время печатания настоящей заметки автор узнал, что теорема 8 была недавно доказана N. Bourbaki [C. R. Acad. Sci., Paris, 206 (1701)] и что теорема 3 для равномерно топологических пространств была недавно доказана A. Weil'ем (Actualités scient. et industr. Publ., Inst. Math. Univ. de Strasbourg, № 551).

Государственный университет.
Одесса.

Поступило
1 XI 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Kolmogoroff, Stud. Math., 5. [2] J. Neumann, Trans. of the Amer. Math. Soc., 37, № 1 (1935). [3] W. Wehausen, Duke Math. Journ., 4, № 1 (1938). [4] Loc. cit. ([2]), определение 6. [5] D. H. Hyers, Bull. of the Amer. Math. Soc., 44, № 2 (1938). [6] Loc. cit. ([2]), определение 10. [7] G. Birkhoff, Annals of Math., 38, № 1 (1937). [8] A. Tychonoff, Math. Annalen, III, 767 (1935). [9] S. Banach, Théorie des opérations linéaires (1932). [10] H. H. Goldstine, Duke Mathem. Journ., 4, № 1 (1938).