Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 3

МАТЕМАТИКА

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

О ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 11 XII 1938)

Докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть функция $Z(u_1, u_2, u_3)$, определенная во всем пространстве (u_1, u_2, u_3), аналитическая и положительно однородная первой степени [т. е. при $r \geqslant 0$ $Z(ru_1, ru_2, ru_3) = rZ(u_1, u_2, u_3)$]. Пусть ее второй дифференциал ни в одной точке (u_1, u_2, u_3) не имеет определенного знака (т. е. в каждой данной точке он или является знакопеременной формой от дифференциалов du_i, или тождественно исчезает). Тогда $Z(u_1, u_2, u_3)$— линейная функция:*

$$Z(u_1, u_2, u_3) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3.$$

Для доказательства интерпретируем переменные u_1, u_2, u_3, как составляющие вектора $\bar{u}$ в прямоугольной системе координат, и рассмотрим огибающую Z семейства плоскостей, задаваемых во взятой системе координат уравнениями

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = Z(u_1, u_2, u_3). \tag{1}$$

В силу положительной однородности первой степени функции $Z(u_1, u_2, u_3)$ можно ограничиться единичными векторами $\bar{n}$, т. е. считать $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1$ и соответственно рассматривать нашу функцию только на единичном шаре E (точки на единичном шаре E мы будем обозначать также, как соответствующие единичные вектора). Тогда видно, что семейство (1) зависит от двух параметров и вместо (1) можно писать в векторных обозначениях

$$\bar{n}\bar{x} = Z(\bar{n}). \tag{2}$$

Координаты точек поверхности Z будут

$$x_i = \frac{\partial Z(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3}$$

В точках, где $d^2 Z(u_1, u_2, u_3)$ не исчезает, поверхность Z имеет определенную касательную плоскость. Собственные значения $d^2 Z$ суть главные радиусы кривизны поверхности Z. Поэтому в точках, где $d^2 Z$ знакопеременная форма, поверхность Z пересекает касательную плоскость ([1]).

Вместе с тем поверхность Z ограничена, а потому имеет опорные плоскости любого направления. Они могут касаться Z только в тех точках, которые соответствуют тем (u_1, u_2, u_3), для которых $d^2Z(u_1, u_2, u_3)$ тождественно исчезает, т. е.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u_i \partial u_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Множество точек на единичном шаре N, где выполнены условия (4), обозначим через N. Для таких множеств имеет место

Лемма I. *Пусть N множество точек на шаре E, где одновременно равны нулю аналитические функции $f_1(\bar{n}), \ldots f_m(\bar{n})$. Для N могут быть только следующие возможности: 1) N пусто, 2) N простирается на всю поверхность E, 3) N состоит из конечного числа точек, 4) N состоит из кривых, разбивающих поверхность на конечное число областей, внутри каждой из которых функции $f_1(\bar{n}), \ldots f_m(\bar{n})$ обращаются одновременно в нуль самое большее в конечном числе точек.*

Эта лемма есть простое следствие известной теоремы Вейерштрасса о неявных аналитических функциях ([2]).

Прежде всего в нашем случае N не пусто, так как иначе у Z не было бы опорных плоскостей.

Если же N простирается на всю поверхность E, то d^2Z исчезает всюду, и значит, функция $Z(u_1, u_2, u_3)$ — линейная.

Нам нужно устранить 3-й и 4-й случаи, оговоренные в лемме I. Для этого нам послужит

Лемма II. *Если точка $\bar{n}_0$, где $d^2Z \equiv 0$, изолированная, то через соответствующую точку $\bar{x}_0$ на поверхности Z может проходить разве только опорная плоскость с нормалью $\bar{n}_0$* (доказательство этой леммы мы дадим ниже).

Пусть множество N состоит из конечного числа точек. Тогда, так как опорные плоскости к Z могут быть только в точках, соответствующих точкам $\bar{n}$ из множества N, то по лемме II у поверхности Z может быть только конечное число опорных плоскостей. Это противоречит ограниченности Z, и следовательно N не может состоять из конечного числа точек.

Остается наконец последняя, четвертая, возможность леммы I. Пусть G — область на E, ограниченная кривой L, принадлежащей множеству N, такая, что в ней $d^2Z \equiv 0$ только в конечном числе точек.

Так как на L $d^2Z(\bar{u}) \equiv 0$, то на L

$$x_1 = \frac{\partial Z}{\partial u_1} = a_1, \quad x_2 = \frac{\partial Z}{\partial u_2} = a_2, \quad x_3 = \frac{\partial Z}{\partial u_3} = a_3 \tag{5}$$

постоянны. А по однородности функции $Z(\bar{u})$

$$Z(\bar{u}) = u_1 \frac{\partial Z}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial Z}{\partial u_2} + u_3 \frac{\partial Z}{\partial u_3} \tag{6}$$

и следовательно на L

$$Z(\bar{u}) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3. \tag{7}$$

Определим функцию $Z^*(u_1, u_2, u_3)$, положительно однородную первой степени, равную $Z(u_1, u_2, u_3)$ в области G и равную $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ вне области G. Эта функция дважды непрерывно дифференцируема, так как на границе области G $d^2Z(\bar{u}) \equiv 0$.

Построим поверхность Z^*, огибающую семейства плоскостей

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = Z^*(u_1, u_2, u_3). \tag{8}$$

Поверхность Z^* имеет опорные плоскости всех направлений. Вместе с тем в точках $\bar{x}$ на ней, соответствующих точкам $\bar{n}$ из области G, может быть только конечное число опорных плоскостей, как это следует из леммы II.

Поэтому все опорные плоскости к Z^* проходят через единственную точку (a_1, a_2, a_3), соответствующую тем u_1, u_2, u_3, для которых

$$Z^*(u_1, u_2, u_3) = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3. \tag{9}$$

[По формуле (3) или (5) a_1, a_2, a_3 как раз и являются координатами той точки на поверхности Z^*, которая соответствует тем u_1, u_2, u_3, для которых выполнено (9).]

Но в таком случае Z^* сводится к точке (a_1, a_2, a_3), и область G исчезает, так как всем ее точкам $\bar{n}$, где $d^2Z^*(\bar{n}) \not\equiv 0$, должны соответствовать на Z точки, в которых есть касательные плоскости.

Этим самым наша теорема доказана.

Докажем лемму II. Пусть $\bar{n}_0$—изолированная точка, в которой $d^2Z(\bar{n}_0) \equiv 0$. Пусть $\bar{x}_0$—соответствующая точка на поверхности Z. Допустим вопреки утверждению леммы, что в точке $\bar{x}_0$ есть опорная плоскость P_1 с нормалью $\bar{n}_1 \neq \bar{n}_0$. Пусть U—окрестность $\bar{n}_0$, не содержащая ни внутри, ни на границе других точек, где $d^2Z(\bar{n}) \equiv 0$, и столь малая, что она пересекает не все большие круги, проходящие через $\bar{n}_1$. Пусть V—соответствующая окрестность точки $\bar{x}_0$ на Z. Во всех точках V, кроме разве $\bar{x}_0$, есть касательная плоскость. На плоскости P_1 V имеет единственную точку $\bar{x}_0$, так как иначе P_1 не была бы опорной к V. Поэтому есть плоскости P, параллельные P_1 и пересекающие Z по замкнутым кривым L. Все кривые L гладкие и имеют опорные прямые любого направления, т. е. нормали любого направления. Нормаль к L есть проекция на плоскость P нормали к Z в той же точке. Поэтому наличие у L нормалей всех направлений означает, что на Z есть точки со сферическим изображением на любом большом круге, проходящем через $\bar{n}_1$. Однако сферическое изображение V есть выбранная нами окрестность U точки $\bar{n}_0$. Мы пришли к противоречию с условием выбора U, и лемма доказана.

Теорема, доказанная нами, может быть формулирована еще так:

Пусть H_1, H_2—выпуклые тела с аналитическими опорными функциями. Если индикатрисы Дюпена на H_1 и H_2 в точках с параллельными нормалями не могут быть помещены одна внутри другой при совмещении этих точек параллельным переносом, то тела H_1 и H_2 равны и параллельно расположены.

Здесь становится ясным, что доказанная в этой заметке теорема является аналогом следующей теоремы о многогранниках, доказательство которой было дано мною раньше ([3]):

Если у двух выпуклых многогранников грани с параллельными внешними нормалями не могут быть помещены одна внутри другой параллельным переносом, то многогранники равны и параллельно расположены (грани на одном многограннике всегда соответствует грань на другом с той же внешней нормалью; только эта грань может вырождаться в ребро или вершину).

На основании доказанной теоремы легко получается общая теорема единственности для замкнутых поверхностей, недавно доказанная мною ([4]). [Строго говоря, следующая ниже теорема не вполне совпадает с той, которая доказана мною в цитируемой заметке: здесь мы требуем аналитичность опорной функции, тогда как там была достаточна кусочная аналитичность, зато здесь функция $f(R_1, R_2; \bar{n})$ может быть какая угодно.]

Теорема. *Пусть* $f(R_1, R_2; \bar{n})$*—функция точки* $\bar{n}$ *на единичном шаре и переменных* R_1, R_2, *изменяющихся в области* $R_1 \geqslant R_2$. *Пусть при каждом данном* $\bar{n}$ *эта функция от* R_1, R_2 *монотонная (не постоянная). Поверхность* H, *сферическое изображение которой однозначно покрывает всю сферу, с аналитической опорной функцией, однозначно, с точностью до переноса, определяется заданием значений функции* $f(R_1, R_2; \bar{n})$ *для всех нормалей* $\bar{n}$, *если под* R_1, R_2 *понимать главные радиусы кривизны поверхности* H *в точке с нормалью* $\bar{n}$.

Пусть $H'(\bar{u}), H''(\bar{u})$—опорные функции двух поверхностей, для которых

$$f(R_1', R_2'; \bar{n}) = f(R_1'', R_2''; \bar{n}). \tag{10}$$

Тогда из условия монотонности функции $f(R_1, R_2; \bar{n})$ следует, что $R_1' - R_1''$ и $R_2' - R_2''$ или разных знаков, или одновременно исчезают. Поэтому $d^2[H'(\bar{u}) - H''(\bar{u})]$ или знакопеременная форма, или тождественно равен нулю. Следовательно по доказанной нами теореме $H'(\bar{u}) - H''(\bar{u})$ — линейная функция, т. е. поверхности H' и H'' равны и параллельны.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
13 XII 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Бляшке, Дифференциальная геометрия, № 94. [2] Гурса, Курс анализа, т. II, ч. II, гл. XVII. [3] Изв. Акад. Наук, серия мат., 4, 597 (1937). [4] ДАН, XIX, 4, 233 (1938).