Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXII, № 8

МАТЕМАТИКА

К. К. МАРДЖАНИШВИЛИ

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 I 1939)

Рассмотрим систему диофантовых уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+\ldots+x_s=N_1 \\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_s^2=N_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^n+x_2^n+\ldots+x_s^n=N_n \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

В работе «Об одновременном представлении n чисел суммами полных первых, вторых, ... , n-ых степеней» ([1]) мною была дана асимптотическая формула для числа $I(N_1, \ldots, N_n)$ решений системы (1) в целых неотрицательных числах $x_1, \ldots, x_s$ в случае, когда $s \geqslant 2^{2n} \cdot n!\,(n+1)^3$. В настоящей работе, пользуясь одной новой леммой академика И. М. Виноградова, я показываю, что асимптотическую формулу для числа решений системы (1) можно установить и при существенно меньшем числе слагаемых; именно, я доказываю следующую теорему:

Пусть n—целое $\geqslant 2$, s—целое $\geqslant 5n(n+1)(n+2)\lg n$. Тогда можно выбрать вещественные $E_k=E_k(n, s)>1$; $e_k=e_k(n, s)<1$ так, чтобы для любых натуральных $N_1, N_2, \ldots, N_n$, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{array}{l} N_k=h_k N_n^{\frac{k}{n}} \\ E_k \leqslant h_k \leqslant s^{1-\frac{k}{n}} e_k \end{array} \quad (k=1, 2, \ldots, n-1)\right\}, \qquad (2)$$

число решений системы (1) в целых неотрицательных числах выражалось формулой:

$$I(N_1, \ldots, N_n)=B_1(n, s; h_1, \ldots, h_{n-1}) N_n^{\frac{s}{n}-\frac{n+1}{2}}[\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n)+O(N_n^{-\omega})], \qquad (3)$$

где

$$\omega=\frac{1}{2^{n+4} \cdot n!\, n^2},$$

$$B_1(n, s; h_1, \ldots, h_{n-1}) \geqslant B_0(n, s)>0,$$

$$\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n)=\sum_{q_1, \ldots, q_n=1}^{\infty} A(q_1, \ldots, q_n), \qquad (4)$$

$$A(q_1, \dots, q_n) = \sum_{a_1,\dots,a_n}{}' D^s e^{-2\pi i\left(\frac{a_1}{q_1}N_1 + \dots + \frac{a_n}{q_n}N_n\right)}, \tag{5}$$

причем в последней сумме $a_1, \dots, a_n$ пробегают приведенные системы вычетов соответственно по модулям $q_1, \dots, q_n$ и

$$D = \frac{1}{q_1 \cdots q_n} \sum_{1 \leqslant x \leqslant q_1 q_2 \cdots q_n} e^{2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n}x^n + \dots + \frac{a_1}{q_1}x\right)}. \tag{6}$$

Доказательство. 1. Пусть $N_1 < N_2 < \dots < N_n$ — заданные целые положительные числа. Введем обозначения:

$$N_n = P^n,$$
$$N_k = P^k \cdot h_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Пусть далее натуральные $M_1, \dots, M_n$ удовлетворяют неравенствам:

$$N_r - N_r P^{-\delta} \leqslant M_r \leqslant N_r,$$

где

$$\delta = \frac{7}{8n}.$$

Число $I(M_1, \dots, M_n)$ решений системы

$$x_1^r + x_2^r + \dots + x_s^r \qquad (r = 1, 2, \dots, n) \tag{7}$$

представится в виде

$$I(M_1, \dots, M_n) = \int_0^1 \dots \int_0^1 T^s e^{-2\pi i(\alpha_n M_n + \dots + \alpha_1 M_1)} d\alpha_n \dots d\alpha_1, \tag{8}$$

где

$$T = \sum_{0 \leqslant x \leqslant P} e^{-2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)}. \tag{9}$$

2. Рассмотрим числа

$$\lambda_k = \frac{1}{2^{k+2} \cdot k! n}, \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$
$$\tau_k = P^{k - \lambda_k}.$$

Каждое α_k, лежащее между 0 и 1, представим в виде

$$\alpha_k = \frac{a_k}{q_k} + z_k,$$

где

$$(a_k, q_k) = 1, \quad 1 \leqslant q_k \leqslant \tau_k, \quad |z_k| \leqslant \frac{1}{q_k \tau_k}. \tag{10}$$

Для получения главной части выражения $I(M_1, \dots, M_n)$ рассмотрим те $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, у которых соответствующие им $q_1, \dots, q_n$ удовлетворяют условиям

$$q_k \leqslant P^{\lambda_k}.$$

Дословно воспроизведя доказательство § 3 первой части вышеупомянутой работы ([1]), найдем, что сумма $I_1(M_1, \ldots, M_n)$ интегралов по параллелоидам

$$\frac{a_k}{q_k}-\frac{1}{\tau_k} \leqslant z_k \leqslant \frac{a_k}{q_k}+\frac{1}{\tau_k}, \tag{11}$$

распространенная на все значения $q_1, a_1; \ldots; q_n, a_n$, удовлетворяющие условиям (10) и (11), будет такова, что

$$I_1(M_1, \ldots, M_n) = Q \sum_{1\leqslant q_1 \leqslant P^{\lambda_1}} \cdots \sum_{1 \leqslant q_n \leqslant P^{\lambda_n}} A(q_1, \ldots, q_n) + O\left(P^{s-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{4n}}\right),$$

где

$$Q = \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{\frac{1}{\tau_1}} \cdots \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{\frac{1}{\tau_1}} \rho^s e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k N_k} dz_n \ldots dz_1,$$

при

$$\rho = \int_0^P e^{2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k t^k} dt.$$

Далее мы покажем, что оставшаяся часть I_2 интеграла (8) будет такова, что

$$I_2 \ll P^{s-\frac{n(n+1)}{2}-n\omega}. \text{ *}$$

3. Рассмотрим теперь те $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, у которых соответствующие им $q_1, \ldots, q_n$ таковы, что хотя бы для одного из последних выполняется неравенство

$$q_r > P^{r-\lambda_r}.$$

При нечетном s получим, что

$$|I_2| < (\max|T|) \int_0^1 \ldots \int_0^1 |T|^{s-1} d\alpha_n \ldots d\alpha_1,$$

$$|I_2| < (\max|T|) \int_0^1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^1 e^{2\pi i d_n\left(x_1^n+\ldots+x_{\frac{s-1}{2}}^n - x_{\frac{s+1}{2}}^n \ldots - x_{s-1}\right)+\ldots+2\pi i d_1\left(x_1+\ldots+x_{\frac{s-1}{2}}-x_{\frac{s+1}{2}}-\ldots-x_{s-1}\right)} d\alpha_n \ldots d\alpha_1$$

Оценивая $|T|$ так, как это сделано в § 4 и 5 работы ([1]) и, принимая во внимание, что число решений системы

$$\left.\begin{array}{c} x_1^n+\ldots+x_{\frac{s-1}{2}}^n - x_{\frac{s+1}{2}}^n - \ldots - x_{s-1}^n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1+\ldots+x_{\frac{s-1}{2}} - x_{\frac{s+1}{2}} - \ldots - x_{s-1} = 0 \end{array}\right\},$$

* $A \ll B$ означает то же, что и $A = 0(B)$.

удовлетворяющих условию $0 \leqslant x_i \leqslant P$, при выбранном нами s в силу леммы 6 работы академика И. М. Виноградова ([2]) будет

$$\ll P^{s-1-\frac{n(n+1)}{2}},$$

получим, что оставшаяся часть интеграла (8) будет $\ll P^{s-\frac{n(n+1)}{2}-n\omega}$. В случае четного s получаем ту же оценку, вынося за знак интеграла $(\max|T|)^2$.

4. Итак, для числа $I(M_1, \ldots, M_n)$ решений системы (7) мы получаем:

$$I(M_1, \ldots, M_n) = Q \sum_{1 \leqslant q_1 \leqslant P^{\lambda_1}} \cdots \sum_{1 \leqslant q_n \leqslant P^{\lambda_n}} A(q_1, \ldots, q_n) + O\left(P^{s-\frac{n(n+1)}{2}-n\omega}\right),$$

откуда, как нетрудно видеть, следует:

$$I(M_1, \ldots, M_n) = Q\mathfrak{S} + O\left(P^{s-\frac{n(n+1)}{2}-n\omega}\right).$$

Вычисляя далее Q так же, как в § 7 и 8 работы ([1]), получим:

$$I(N_1, \ldots, N_n) = B_1(n, s; h_1, \ldots, h_{n-1}) P^{s-\frac{n(n+1)}{2}} [\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n) + O(P^{-n\omega})],$$

где

$$B_1(n, s; h_1, \ldots, h_{n-1}) \geqslant B_0(n, s) > 0,$$

что и доказывает теорему.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
1 II 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. К. Марджанишвили, Об одновременном представлении n чисел суммами полных первых, вторых, ..., n-ых степеней, Известия АН СССР, серия математическая, № 4 (1937). [2] И. М. Виноградов. Некоторые общие леммы и их применение к оценке тригонометрических сумм, Мат. сборник, **3 (45)**, вып. 3 (1938).